Các không gian Hàm

Bởi:

Đinh Dũng

Chương này là một bước chuẩn bị để dẫn tới các định lý trung tâm của lý thuyết xấp xỉ. Chúng ta sẽ nghiên cứu một số không gian hàm có liên quan đến độ trơn của hàm số, như là: không gian Sobolev, không gian Lipschitz, không gian H

lder.

Một số khái niệm cơ bản, không gian LP(A), -C(A)

Nếu không nói gì khác, ta vẫn xét miền xác định của hàm số là R,R+,T hoặc [a,b].

Không gian –C(A)

Không gian -*C(A)* gồm tất cả các hàm thực (hoặc phức), xác định và liên tục trên *I* -*(A)* là không gian định chuẩn, với chuẩn

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Ký hiệu -*C(A)* là không gian con của -*C(A)*, gồm tất cả các hàm

liên tục đều trên *A*. Rõ ràng, nếu A = -T hoặc A= [-a,b], thì -*C(A)* = -*C(A)* Nếu *A* compact thì

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in A} |f(x)|.$$

Không gian *C-r(A)* gồm tất cả các hàm khả vi liên tục cấp

trên *A*. Các hàm

và P -Pxác định bởi

-

và

$$|f| := \|f^{(r)}\|_{\infty}$$

$$\|f\| := \|f\|_{\infty} + |f|,$$

lần lượt là một nửa chuẩn và chuẩn trên *C-r(A)*. Ký hiệu *C* ∞ *(A)* là không gian tất cả các hàm khả vi vô hạn lần trên

.

Không gian Lp(A)

Không gian $L_p(A)$ gồm tất cả các hàm *f* khả tích cấp

trên

, tức là đại lượng sau là hữu hạn

$$x_1, \ldots, x_m \in A, \sum_{i=1}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| \quad \delta,$$

Khi

, $L_p(A)$ là không gian Banach. Với

,

là không gian phản xạ. Nếu

, thì không gian đối ngẫu của $L_p(A)$ là $L_{p'}(A)$ với

Dạng rời rạc của *Lp* là

gồm các dãy

sao cho

$$x_1,\dots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta,$$

Hai bất đẳng thức đặc trưng của không gian $L_p(A)$ là

$$x_1,\dots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta,$$

Nếu

, thì từ bất đẳng thức H

lder ta suy ra các phép nhúng liên tục của không gian $L_p(A)$ và

:

$$x_1,\dots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta,$$

Không gian các hàm khả vi: Không gian Sobolev

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một vài tính chất cơ bản của không gian Sobolev.

Ta đã biết rằng hàm

xác định trên

là liên tục tuyệt đối nếu với mọi

, tồn tại

sao cho với mọi

$$x_1,\ldots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta ,$$

, thì

$$x_1,\ldots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta ,$$

Hàm

liên tục tuyệt đối trên

khi và chỉ khi

tồn tại hầu khắp nơi.

Giả sử

là không gian Banach các hàm xác định trên

, ký hiệu

là không gian tuyến tính các hàm

sao cho

liên tục tuyệt đối và

Nửa chuẩn và chuẩn trên

lần lượt là

$$x_1,\ldots,x_n, \in A, \sum_{i=1}^{m-1} | x_{i+1} - x_i | \quad \delta ,$$

Đa thức Taylor và bất đẳng thức đạo hàm

Cho

$$x_1,\ldots,x_n,\in A,\sum_{i=1}^{m-1}|x_{i+1}-x_i| \quad \delta,$$

Khi đó

có các đạo hàm liên tục cấp

. Vì vậy với mỗi

, đẳng thức

$$x_1,\ldots,x_n,\in A,\sum_{i=1}^{m-1}|x_{i+1}-x_i| \quad \delta,$$

hoàn toàn được xác định, và được gọi là đa thức Taylor của

tại

. Bằng quy nạp và tích phân từng phần ta có

$$x_1,\ldots,x_n,\in A,\sum_{i=1}^{m-1}|x_{i+1}-x_i| \quad \delta,$$

Chúng ta sẽ thường xuyên sử dụng ước lượng sau đối với phần dư.$f - T_{r-1}$