Các định lý trung tâm của lý thuyết xấp xỉ

Bởi:

Đinh Dũng

Chúng ta đã đi qua một bước chuẩn bị tương đối dài để đi đến các Định lý trung tâm của lý thuyết xấp xỉ. Các định lý này sẽ giải quyết vấn đề trọng tậm của lý thuyết xấp xỉ. Vấn đề này được đặt ra như sau:

(i) Xác định tốc độ xấp xỉ khi biết độ trơn của hàm số *f*.

(ii) Xác định độ trơn theo tốc độ hội tụ của $E_n(f)_p := \inf_{\varphi \in T_n} Pf - \varphi P_p$.

Khi $p = \infty$, ta có hai định lý sau

Định lý 0.1 *(Jackson (1912)) Nếu f $C^r(T)$, thì*

$E_n(f)_\infty C_r n^{-r} \omega(f^{(r)}, n^{-1}), n=1,2...$

Định lý 0.2 *(Bernstein) Nếu tồn tại 0<α<1 sao cho*

$E_n(f)_\infty C_r n^{-r-\alpha}, n=1,2,...,$

thì

$f^{(r)} \in Lip\alpha$

Các Định lý này sẽ được chứng minh trong các mục sau. Từ hai khẳng định trên ta suy ra

$f \in Lip\alpha$ khi và chỉ khi $E_n(f)_\infty Cn^{-\alpha}, 0<\alpha<1.$

Các định lý thuận

$Pf - L_n(f)P_p C\omega_2(f, n^{-1})_p.$

∈

Do đó

$E_n(f)_p C\omega_2(f,n^{-1})_p$. (4.2)

Bây giờ ta xét nhân Jackson $K_n(t)$ cho bởi

$$K_n(t) := \lambda_n\left(\frac{\sin\ mt/2}{\sin\ t/2}\right)^4, \quad m := [n/2]+1, \int_{\mathrm{T}} K_n(t)dt = 1; \tag{4.3}$$

đẳng thức cuối cùng xác định λ_n. Khi đó (1.1) được viết lại dưới dạng

$$J_n(f,x) = \int_{\mathrm{T}} f(x+t)K_n(t)dt.$$

Tổng quát hoá nhân Jackson là nhân

$$K_{n,r}(t) := \lambda_{n,r}\left(\frac{\sin\ mt/2}{\sin\ t/2}\right)^{2r}, \quad m := [n/r]+1, \int_{\mathrm{T}} K_{n,r}(t)dt = 1, \quad n, r > 0. \tag{4.4}$$

Rõ ràng các nhân Jackson tổng quát là các đa thức lượng giác bậc n, không âm, chẵn. Ta ký hiệu $A_n \copyright B_n, n \to \infty$, nếu tồn tại các hằng số C, C' và n_0 sao cho

$CB_n A_n C' B_n, n \geq n_0$.

Bổ đề 1.1 *Với r=1,2,... , ta có*

(i) $\lambda_{n,r} \copyright n^{-2r+1}, n \to \infty$.

(ii) $\int_0^\pi t^k K_{n,r}(t)dt \quad C_r n^{-k}, k = 0,1,\ldots 2r-2.$

Proof. Vì $\frac{2}{\pi} t \sin t \quad t, 0 \quad t \frac{\pi}{2}$, nên suy ra

$$2\lambda_{n,r}^{-1} = 2\int_0^\pi \left(\frac{\sin\ mt/2}{\sin\ t/2}\right)^{2r} dt \copyright \int_0^\pi \left(\frac{\sin\ mt/2}{t}\right)^{2r} dt$$
$$\copyright m^{2r-1}\int_0^{m\pi/2}\left(\frac{\sin\ u}{u}\right)^{2r} \copyright n^{2r-1}$$

Tương tự, với $k = 0,1,\ldots 2r-2$, ta có

$$2\int_0^\pi t^k K_{n,t}(t)dt \quad C\lambda_{n,r}\int_0^\pi t^k\left(\frac{\sin\ mt/2}{t}\right)^{2r} dt$$
$$Cn^{2r-k-1}\lambda_{n,r}\int_0^{m\pi/2} u^k\left(\frac{\sin\ u}{u}\right)^{2r} du \quad Cn^{-k}. \tag{4.5}$$

Định lý 1.2 *(Jackson)*

Tồn tại hằng số C sao cho

$Pf - J_n(f)P_p C\omega_2(f,n^{-1})_p C\omega(f,n^{-1})_p$. (4.6)

$Pf - J_n(f)P_pC\omega_2(f,n^{-1})_pC\omega(f,n^{-1})_p$. (4.6)

$$S_n(f,x) := S_{n,r}(f,x) := \int_{\mathbb{T}}\{(-1)^{r+1}\Delta_t^r(f,x) + f(x)\}K_{n,r}(t)dt \qquad (4.7)$$

Ta sẽ chứng minh $S_n(f)$ là đa thức lượng giác bậc n. Để làm điều này ta cần bổ đề sau

Bổ đề 1.3 *Cho hàm g $L_1(R)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2\pi/k$, k là số nguyên dương. Khi đó nếu l Z không chia hết cho k, thì*

$$\int_{\mathbb{T}} g(t)\cos ltdt = \int_{\mathbb{T}} g(t)\sin ltdt = 0.$$

Proof. Ta có

$$\int_0^{2\pi} g(t)e^{ilt}dt = \int_{2\pi/k}^{2\pi+2\pi/k} g(t)e^{ilt}dt = e^{iltk}\int_0^{2\pi} g(t)e^{ilt}dt.$$

Vì răng l không chia hết cho k nên $e^{ilt/k} = 1$, do đó ta có kết quả trên.

Từ định nghĩa của sai phân ta đã suy ra

$$\Delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r+k}\binom{r}{k}f(x+kt).$$

Nhưng $K_{n,r}(t)$ là đa thức lượng giác chẵn, nên $S_n(f,x)$ là tổ hợp tuyến tính của các tích phân dạng

$$\int_{\mathbb{T}} f(x+kt)\cos ltdt, \quad k = 1,\dots,r;\ l = 1,\dots n. \qquad (4.8)$$

Vì $f(x+kt)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2\pi/k$, nên theo Bổ đề trên (1.8) chỉ khác 0 khi l chia hết cho k. Khi đó chỉ cần đổi biến $u = x + kt$ và áp dụng công thức cộng cung của hàm số cos, ta sẽ nhận được $S_n(f)$ là một đa thức lượng giác bậc n.

Định lý 1.4 *(Steckhin [1951])*

Với r=1,2..., tồn tại hằng số C_r sao cho

$E_n(f)_pC_r\omega_r(f,n^{-1})_p, n=1,2,\dots,1p\ \infty$. (4.9)

Proof. Ta có $\omega_r(f,t)_p(nt+1)^r\omega_r(f,n^{-1})_p$ (tính chất của modul trơn). Sử dụng bất đẳng thức Minkowski,

∈

$$2\|s_n(f)-f\|_p \int_{\mathbb{T}} \|\Delta_t^r(f,\cdot)\|_p K_{n,r}(t)dt \int_{\mathbb{T}} \omega_r(f,t)_p K_{n,r}(t)dt$$
$$\omega_r(f,n^{-1})_p \int_{\mathbb{T}} (nt+1)^r K_{n,r}(t)dt \quad C_r\omega_r(f,n^{-1})_p$$

bất đẳng thức cuối cùng có được do Bổ đề 4.1.1

Hệ quả 1.5 *Nếu f* W_p^r *, thì*

$E_n(f)_p C_r n^{-r} \omega_r(f^{(r)}, n^{-1})_p$.

Hệ quả 1.6 *Nếu f* H_p^α *, α>0 , thì* $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$

Giả sử $f \in L_1(T)$. Ta nói f có giá trị trung bình bằng không nếu

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = 0.$$

Nếu f có giá trị trung bình bằng 0 , và

$$S_n(x) = \sum_{|k| \quad n} c(k)e^{ikx},$$

thì suy ra

$$2|c(0)| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |S_n(x)-f(x)|dx (2\pi)^{-1/p}\|S_n - f\|_p \tag{4.10}$$

Ta đặt

$$S_n^{-\circ}(x) := \sum_{0<|k| \quad n} c(k)e^{-ikx} = S_n(x) - c(0).$$

Ta có

$2\|f(x) - S_{-n}^{\circ}(x)\|_p = \|c(0) + f(x) - S_n(x)\|_p 2\|f - S_n\|_p, 1 p \infty$ (4.11)

Từ (1.11) ta có bổ đề sau

Bổ đề 1.7

$E_n(f)_p C \frac{1}{n} E_n(f')_p$, víi $1 p \infty$, $f \in W_{-p}^r$.

Proof. Gọi S_{-n} là xấp xỉ tốt nhất của f', và S_n là tích phân tuần hoàn của S_n°. Do f' có giá trị trung bình không nên kết hợp (1.11) với Định lý Jackson ta có

∈

$2E_n(f)_p = E_n(f - S_n)_p \omega_1(f - S_n, n^{-1})_p C \frac{1}{-n} P f' - \dot{S}_n^{\circ} P_p$

$2C \frac{1}{n} P f' - \dot{S}_{-n} P_p = 2C \frac{1}{n} E_n(f')_p.$

Bằng cách lặp lại quá trình chứng minh trong bổ đề r lần ta thu được kết quả sau:

Hệ quả 1.8

$E_n(f)_p C_r n^{-r} E_n(f^{(r)})_p, f \in W_p^r.$ (4.12)

Ta kết thúc mục này bằng nhận xét sau:

Nhận xét 1.9 *Các cận trên của sai số xấp xỉ $E_n(f)_p$ thường viết ở một trong các dạng sau:*

$$E_n(f)_p \begin{cases} C_r n^{-r} \mathrm{P} f^{(r)} \mathrm{P}_p & f \in W_r^p; \quad 2cm(A) \\ C_{\alpha,p} n^{-\alpha} \mathrm{P} f \mathrm{P}_{H_p^\alpha} & f \in H_p^\alpha; \quad 2cm(B) \\ C_r n^{-k} \omega_{r-k}(f^{(k)}, n^{-1})_p, \quad 0 \quad k \quad r, f \in W_p^k; & 0.5cm(C) \\ C_r \omega_r(f, n^{-1})_p & f \in L_p; \quad 2cm(D) \end{cases}$$

Từ các tính chất của modul trơn ta có $(D) \Rightarrow (C) \Rightarrow (B) \Rightarrow (A)$ (chứng minh xem như một bài tập).

Xấp xỉ đồng thời

Dưới đây chúng ta sẽ xấp xỉ đồng thời f và các đạo hàm $f^{(k)}$, $k=1,2,\ldots,r$, bởi T_n và các đạo hàm $T_n^{(k)}, k=1,\ldots,r$.

Bổ đề 2.1 *Cho $g \quad L_p(T)$, $1p < \infty$, hoặc $g \quad C(T), p = \infty$, và đa thức lượng giác T_n thoả mãn*

$\mathrm{P} g - T_n \mathrm{P}_p K \omega(f, n^{-1})_p.$

Khi đó ta có

$\mathrm{P} T_n' \mathrm{P}_P K_1 n \omega(g, n^{-1}), K_1 := 2(K+1).$

Proof. Đặt $h := n^{-1}$, ta có

$\mathrm{P} T_n(\cdot + h) - T_n(\cdot - h) \mathrm{P}_p 2 \mathrm{P} g - T_n \mathrm{P}_p + \omega(f, 2h)_p 2(K+1) \omega(g, h)_p.$

$\in$

Mặt khác sử dụng khai triển thành chuỗi Taylor của T_n và sử dụng bất đẳng thức Bernstien ta có

Từ đây ta suy ra khẳng định trên.

$$2\mathrm{P}T_n(\cdot+h)-T_n(\cdot-h)\mathrm{P}_p=\mathrm{P}\sum_{j=1}^{\infty}2\frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!}T_n^{(2j-1)}\mathrm{P}_p$$

$$\geq 2h\mathrm{P}T_n'\mathrm{P}_p-2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!}\mathrm{P}T_n^{(2j-1)}\mathrm{P}_p$$

$$\geq 2h\mathrm{P}T_n'\mathrm{P}_p\{1-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(hn)^{2j-2}}{(2j-1)!}\}$$

$$=2h\mathrm{P}T_n'\mathrm{P}_p\{1-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)!}\}$$

$$\geq h\mathrm{P}T_n'\mathrm{P}_p.$$

Từ bổ đề trên ta đi đến định lý về xấp xỉ đồng thời

Định lý 2.2 *(Czipszer và Freud [1958]) Cho* $f \quad W_p^r, 1p\,\infty$ *, và* T_n *là đa thức xấp xỉ tốt nhất của* f*. Khi đó*

$Pf^{(k)} - T_n^{(k)}P_pC_rE_n(f^{(k)})_p, k=0,1,\ldots,n=0,1,\ldots,$

Proof. Định lý được chứng minh bằng quy nạy theo r.

Nếu $r=0$, thì hiển nhiên $k=0$. Do T_n là đa thức lượng giác xấp xỉ tốt nhất f, nên định lý đúng với $r=0$.

Giả sử định lý đúng với $r = 0$, ta chứng minh định lý đúng với $r+1$. Giả sử $f \in W_p^{r+1}$, ký hiệu $\dot{S}_n$ là đa thức xấp xỉ tốt nhất f', và S_n là tích phân tuần hoàn của $\dot{S}_n - a(0)$,($a(0)$ là hạng tử tự do của $\dot{S}_n$). Sử dụng (1.11) và giả thiết quy nạp ta có

$Pf^{(k+1)} - S_n^{(k+1)}P_pC_rE_n(f^{(k+1)})_p.$

Gọi R_n là đa thức lượng giác xấp xỉ tốt nhất $f - S_n$. Khi đó ta có $T_n = R_n + S_n$, và

$PR_n'P_pCn\omega(f-S_n,n^{-1})_pCPf' - S_n'P_pCE_n(f')_p,$

$\in$

trong đó bất đẳng thức thứ nhất là do Bổ đề 4.2.1, bất đẳng thức thứ hai là do bất đẳng thức Minkowski (cụ thể hơn là tính chất của modul trơn), bất đẳng thức cuối cùng là do giả thiết quy nạp với k=0.

Sử dụng bất đẳng thức Bernstein và Hệ quả 4.1.8 ta có

$$PR_n^{(k+1)}P_p Cn^k PR_n^{'}P_p Cn^k E_n(f^{'})_p CE_n(f^{(k+1)})_p.$$

Ta có $Pf - T_nP_p = E_n(f)_p$ và hơn nữa với k=0,1,..r,

$$Pf^{(k+1)} - T_n^{(k+1)}P_p Pf^{(k+1)} - S_n^{(k+1)}P_p + PR_n^{(k+1)}P_p CE_n(f^{(k+1)})_p.$$

Vậy định lý được chứng minh.

Nhược điểm của bất đẳng thức trên là đa thức xấp xỉ tốt nhất hiếm khi biết. Tuy nhiên, chúng ta cũng có cách khắc phục như sau:

Định lý 2.3 *Cho* $f \quad W_p^r$ *và* $S_n \quad T_n$ *thoả mãn*

$$Pf - S_nP_p C_r n^{-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})_p, n=1,2,....$$

Khi đó ta có, với n=1,2,..,

$$Pf^{(k)} - S_n^{(k)}PC_r n^{k-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})_p, k=1,...,r,$$

và

$$PS_n^{(r+1)}P_p C_r n\omega(f^{(r)},n^{-1})_p.$$

Proof. Gọi T_n là đa thức xấp xỉ tốt nhất f. Ta có

$$2\mathrm{PS}_n - T_nP_p PS_n - fP_p + PT_n - fP_p C_r^{'} n^{-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})_p.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bernstein và Định lý 4.2.2 ta có

$$2\mathrm{Pf}^{(k)} - S_n^{(k)}P_p Pf^{(k)} - T_n^{(k)}P_p + PS_n^{(k)} - T_n^{(k)}P_p$$

$$C_r n^k PT_n - S_nP_p + C_rE_n(f^{(k)})_p$$

$$C_r n^{k-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})_p.$$

Bất đẳng thức thứ hai của định lý được suy ra rừ Bổ đề 4.2.1 và bất đẳng thức thứ nhất với $k = r$. Vậy định lý được hoàn toàn chứng minh.

$\in$

Các định lý ngược

Trong mục các Định lý thuận ta đã ước lượng các sai số xấp xỉ $E_n(f)_p$ thông qua modul trơn. Trong phần này chúng ta sẽ ước lượng ngược lại, tức là ước lượng các modul trơn thông qua sai số xấp xỉ.

Định lý 3.1 *Cho f -L_p(-T) , 1p ∞ , r=1,... . Khi đó tồn tại hằng số C_r sao cho*

$$\omega_r(f,n^{-1})_p \quad C_r n^{-r} \sum_{-k=1}^{-n} k^{-r-1} E_k(f)_p, \quad n=1,\ldots \tag{4.13}$$

Proof. Giả sử T_n là đa thức xấp xỉ tốt nhất f. Khi đó với m=0,1...., và h:=n^{--1}, ta có

$\omega_r(f,h)_p \omega_r(f-T_{-2^{-m+1}},h)_p+\omega_r(T_{-2^{-m+1}},h)_p$. (4.14)

Ta có

$\omega_r(f-T_{-2^{-m+1}},h)_p 2^r E_{-2^{-m+1}}(f)$

và

$$\begin{aligned} 2\omega_r(T_{-2^{-m+1}},h)_p \quad & h^{-r} \mathrm{P} T^{-(r)}_{-2^{-m+1}} \mathrm{P}_p \quad h^r\{\mathrm{P}T_{-1}^{-(r)}-T_{-0}^{-(r)}\mathrm{P}_p+\sum_{-\nu=0}^{-m}\mathrm{P}T^{-(r)}_{-2^{-\nu+1}}-T^{-(r)}_{-2^{-\nu}}\mathrm{P}_p\} \\ & h^{-r}\{2E_{-0}(f)_p+\sum_{-\nu=0}^{-m}2^{-(\nu+1)r}\mathrm{P}T_{-2^{-\nu+1}}-T_{-2^{-\nu}}\mathrm{P}_p\} \\ & 2h^r\{E_0(f)_p+\sum_{-\nu=0}^{m-}2^{-(\nu+1)r}E_{-2^{\nu}}(f)_p\}. \end{aligned}$$

Vì rằng $2^{-(\nu+1)r} E_{-2^{\nu}}(f)_p \; 2^{2r} \sum_{-k=2^{-\nu-1}+1}^{2^{\nu}} k^{-r-1} E_k(f)_p, \nu \geq 1$ nên ta có

$$\omega_r(T_{-2^{-m+1}},h)_p \; 2^{2r+1} h^r \{E_0(f)_p+E_1(f)_p+\sum_{k=2}^{-2^m} k^{-r-1} E_k(f)_p\}. \tag{4.15}$$

Với mỗi n, ta chọn m sao cho $2^m n<2^{-m+1}$. Khi đó, từ bất đẳng thức (3.14) và (3.15), ta suy ra (3.13) với vế phải cộng thêm $E_0(f)_p$. Lặp lại quá trình trên với g:=$f-c$, với c là hằng xấp xỉ tốt nhất f, ta suy ra (3.13) đúng với f.

Vậy định lý được chứng minh.

Đặc biệt khi r=1, ta có

∈

$$\omega(f,n^{-1})_p \quad Cn^{-1}\sum_{k=1}^{n} E_k(f)_p, \quad f \in L_p(\mathrm{T}). \qquad (4.16)$$

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để một hàm thuộc W_p^r:

Định lý 3.2 *Nếu hàm f $L_p(T)$, 1p ∞ ,r=1,2,... , thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} E_k(f)_p < \infty,$$

thì $f \in W_p^r$.

Proof. Gọi T_n là đa thức xấp xỉ tốt nhất f, ta có $PT_{2^{\nu+1}} - T_{2^\nu}P_p 2E_{2^\nu}(f)_p$. Từ bất đẳng thức Bernstein ta có

$$\mathrm{P}T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\mathrm{P}_p\, 2^{(\nu+1)r+1}E_{2^\nu}(f)_p \quad C\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu} k^{r-1}E_k(f)_p.$$

Suy ra $\sum \mathrm{P}T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\mathrm{P}_p < \infty.$

Vì vậy $\{T_{2^\nu}\}$ là dãy Cauchy trong W_p^r. Do W_p^r là không gian Bannach và $T_{2^\nu} \to f$ trong L_p, nên $f \in W_p^r$.

Từ Định lý 4.3.1 ta suy ra:

Hệ quả 3.3 *Nếu*

$E_n(f)_p = O(n^{-\alpha}), \alpha>0, n=1,2,....,$ (4.17)

thì

$$\omega_r(f,t)_p = \begin{cases} \mathrm{O}(t^\alpha) & \text{nếu} \quad \alpha < r \\ \mathrm{O}(t^\alpha \log(1/t)) & \text{nếu} \quad \alpha = r \\ \mathrm{O}(t^r) & \text{nếu} \quad \alpha > r. \end{cases}$$

Đặt $r = [\alpha] + 1$-, thoả mãn $r > \alpha$, vì vậy từ (3.17) suy ra $f \in H_p^\alpha$. Kết hợp với Hệ quả 4.1.6 ta có

∈

Định lý 3.4 *Với α>0 , 1p ∞ , hệ thức* $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$ *tương đương với f* H_p^{α}.

Ví dụ 3 $E_n(f)_p = O(n^{-1})$ *tương đương với f* $Z_{1,p}{:=}H_p^1$ *. Tuy nhiên không suy ra f* $Lip(1,L_p)$ *, với* $1<p\ \infty$ *.*

Xấp xỉ bằng đa thức đại số

Cho $A = [a,b], f \in L_p(A)$. Sai số xấp xỉ tốt nhất f bởi P_n được cho bởi

$$E_n(f)_p{:=}\inf_{P_n \in P_n} Pf - P_nP_p.$$

Không mất tổng quát ta xét $A = [-1,1]$, nếu không thì ta dùng một phép thế tuyến tính đưa A về $[-1,1]$. Chúng ta sẽ ước lượng $E_n(f)_p$ thông qua modul trơn, (định lý thuận). Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Vì tại gần các điểm cuối ±1 có các quy tắc đặc biệt trong xấp xỉ. Ví dụ một hàm $f \in C([-1,1])$ có thể được xấp xỉ tốt hơn khi x gần ±1.

Định lý 4.1 *Cho f* $W_p^r(A)$ *, n > r , r=0,1,.... , 1p ∞ . Khi đó sai số xấp xỉ thoả mãn*

$$E_n(f)_p C n^{-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})_p.$$

Proof. Định lý được chứng minh bởi các bước sau:

Bước 1. Ta chứng minh với $f \in W_p^1(A)$,

$$E_n(f)_p \frac{C}{n} Pf'P_p. \quad (4.18)$$

Đặt $x{:=}\cos t$ và $g(t){:=}f(\cos t)$. Khi đó g là hàm chẵn, và $g \in W_p^1$ vì

$$2Pg'P_p^p = \int_T |g'(t)|^p\,dt = 2\int_0^{\pi} |g'(t)|^p\,dt$$
$$= 2\int_{-1}^{1} |\sin t f'(t)|^p \frac{dt}{\sin t}\ 2Pf P_p.$$

Gọi T_n là đa thức lượng giác xấp xỉ tốt nhất g. Theo hệ quả của Định lý thuận, ta có

$$PT_n - gP_p \frac{C}{n} Pg'P_p.$$

Vì g là hàm chẵn nên T_n cũng là hàm chẵn, do đó tồn tại $P_n \in P_n$ sao cho $P_n(\cos t) = T_n(t)$. Ta có

$$2Pf - P_nP_p 2^{-1/p} Pg - T_nP_p C n^{-1} Pg'P_p C n^{-1} Pf'P_p$$

∈

$\Rightarrow$ (4.18).

<u>Bước 2</u> Ta chứng minh

$E_n(f)_p C\omega(f,n^{-1})_p, f \in L_p$. (4.19)

Với $h \in W_p^1$, ta có

$2E_n(f)_p Pf - hP_p + E_n(h)_p$

$C\{Pf - hP_p + n^{-1}Ph'P_p\}$,

do đó $E_n(f)_p CK_1(f,n^{-1})C\omega(f,n^{-1})$.

Bước 3 Ta chứng minh, với $n \geq 1, f \in W_p^1$:

$E_n(f)_p Cn^{-1}E_{n-1}(f')_p$. (4.20)

Giả sử $P_n' \in P_n$ là một đa thức xấp xỉ tốt nhất f'. Gọi P_n là một tích phân của P_n'. Ta có

$E_n(f)_p = E_n(f - P_n)Cn^{-1}Pf' - P_n'P_p = Cn^{-1}E_{n-1}(f')_p$.

Từ (4.19) và (4.20) ta suy ra định lý bằng cách lặp lại r lần các bước trên.

Định lý 4.2 *Cho $1p\infty$,r=1,... . Khi đó tồn tại hằng số C_r>0 sao cho: với f $L_p([-1,1])$,*

$E_n(f)_p C_r\omega_r(f,n^{-1})_p, n \geq r$.

Proof. Giả sử $g \in W_p^r$. Ta có

$E_n(g)_p C_r n^{-r}\omega(g^{(r)},n^{-1})_p C_r n^{-r}Pg^{(r)}P_p$.

Vì vậy với $f \in L_p$, ta có

$2E_n(f)_p C(Pf - gP_p + E_n(g)_p)$

$C_r(Pf - gP_p + n^{-r}Pg^{(r)}P_p)$

$C_rK(f,n^{-r};L_p,W_p^r)C_r\omega_r(f,1/n)_p$

Nhận xét 4.3

(i) Không có bất đẳng thức đảo đối với Định lý 4.4.2.

$\in$

(ii) Tuy nhiên khi $I = [-a,a], 0<a<1$. Ta có

$$\omega_r(f,n^{-1})_{L_p(I)} \quad Cn^{-r}\sum_{k=r}^{n} k^{r-1}E_k(f)_p.$$

Nhưng bất đẳng thức này không đúng cho $I = [-1,1]$!

Bài tập

Bài tập 1 *Chứng minh nhân Jackson tổng quát $K_{n,r}$ (xem mục 4.1) là đa thức lượng giác không âm, chẵn, có bậc n.*

Bài tập 2 *Cho $0<\alpha<1$. Chứng minh rằng*

$f \in Lip(\alpha, L_p) \Leftrightarrow Pf - \sigma_n(f)P_p Cn^{-\alpha}$.

Bài tập 3 *Chứng minh rằng (D)   (C)   (B)   (A). (Nhận xét 4.1.9)*

$\Rightarrow$