Các Định lý Weierstrass

Bởi:

Đinh Dũng

Trong chương này chúng ta sẽ xấp xỉ các hàm số trong không gian $C(A)$, không gian các hàm liên tục xác định trên tập A, trong đó A lµ $[a,b], T:=[0,2\pi)$, hoặc một tập compact trong R^n, hoặc tổng quát hơn là không gian tôpô compact Hausdorff, bởi các đa thức lượng giác khi $A = T$ và đa thức đại số trong những trường hợp còn lại.

Các khái niệm cơ bản

Giả sử X là một không gian của các hàm xác định trên A, $f \in X$. Ta cần tìm hàm đơn giản (thuận tiện cho tính toán) φ từ một tập con Φ của X sao cho f rất gần với φ.

Không gian X thường là không gian định chuẩn hoặc là không gian Bannach của các hàm xác định trên A, chẳng hạn như $C(A), L_p(A)$ víi 1„p„ ∞ . Khi X là không định chuẩn thì khoảng cách giữa f và φ được đo bằng $Pf - \varphi P_X$. Đại lượng $Pf - \varphi P_X$ được gọi là sai số xấp xỉ f bëi φ. Tập con Φ là một tập các hàm số có tính chất đơn giản, thuận tiện cho tính toán. Φ được gọi là không gian xấp xỉ. Dưới đây là một số không gian xấp xỉ quan trọng.

(a) $\Phi = P_n$ là một tập các đa thức đại số bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, tức là tập các hàm có dạng

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

P_n thường dùng để xấp xỉ các hàm xác định trên $[a,b]$.

(b) $\Phi = T_n$ là tập các đa thức lượng giác bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, tức là các hàm xác định trên T có dạng

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ với } a_n \neq \text{ hoặc } b_n \neq 0.$$

Hoặc

$a_k e^{ikx}$với $|a_{-n}| + |a_n| = 0$.

T_n thường dùng để xấp xỉ các hàm xác định trên T.

(c) Lớp các hàm spline.

(d) Lớp các sóng nhỏ.

Chúng ta đã biết rằng khi A là tập compact thì $C(A)$ là không gian Bannach với chuẩn

$PfP := \max_{x \in A} |f(x)|$.

Hai định lý dưới đây sẽ gải quyết vấn đề trên cho trường hợp $X = C(A)$ với $A = [a,b]$hoặcT
.

Định lý 1 *(Weierstrass-1) Mỗi hàm f liên tục trên đoạn [a,b] có thể xấp xỉ bằng đa thức đại số với độ chính xác tuỳ ý, nghĩa là với mỗi ε>0 , tồn tại đa thức đại số P sao cho*

$Pf - PP_{C([a,b])}$„ε.

Định lý 2 *(Weierstrass-2) Mỗi hàm f liên tục trên T có thể xấp xỉ bằng đa thức lượng giác với độ chính xác tuỳ ý, nghĩa là với mỗi ε>0 , tồn tại đa thức lượng giác T sao cho*

$Pf - TP_{C(T)}$„ε.

Hai định lý này được chứng minh trong các mục sau, dựa vào các tính chất của một số toán tử tuyến tính đặc biệt.

Đa thức Bernstein

Giả sử $f \in C([0,1])$, công thức

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 0,1,2....$$

xác định một ánh xạ từ $C([0,1])$ vào P_n. Ta gọi $B_n(f)$ là đa thức Bernstein bậc n của f. Mệnh đề sau cho ta biết các tính chất của B_n:

Mệnh đề 3

(i) B_n là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn 1, xác định dương, tức là $PB_nP=1, B_n(f) \geq 0$với $f(x) \geq 0 \forall x \in A$.

(ii) Ký hiệu $e_k(x):=x^k, k=0,1,2$. Ta có $B_n(e_0) = e_0, B_n(e_1) = e_1, B_n(e_2,x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{2}$.

Proof. (i). Hiển nhiên B_n là toán tử tuyến tính và xác định dương. Với mỗi $f \in C([0,1])$ ta có $|B_n(f,x)| [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}] P f P = P f P$. Do đó $PB_n(fP) = PfP$

Đặt biệt, với $f=1$ thì $PB_n(f)P = PfP$. Suy ra $PB_nP=1$.

(ii). Ta có $e_0=1$ nên $B_n(e_0) = e_0$. Ta cũng có

$$2B_n(e_1,x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} x^s (1-x)^{n-s-1} = x \qquad (1.1)$$

và

$$2\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n-2}{s} x^s (1-x)^{n-s-2}$$

$$= n(n-1)x^2. \qquad (1.2)$$

Từ(1.1) suy ra $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$, kết hợp với (1.2) ta có

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n^2x^2 + nx(1-x).$$

Vậy $B_n(e_2,x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$.

Chuỗi Fourier

Giả sử $S[f]: \sum_{n\in Z} \hat{f}(n) e^{inx}$, trong đó $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$, được gọi là chuỗi Fourier (dạng phức) của *f*, và $\hat{f}(n)$ là hệ số Fourier của *f*. Chuỗi Fourier dạng thực của f là chuỗi có dạng $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$ trong đó $a_k:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx, b_k:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx,$ là hệ số Fourier của *f*.

Ta có

$$2\hat{f}(k)+\hat{f}(-k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(e^{ikx}+e^{-ikx})dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx=a_k,$$

và

$$2\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(e^{-ikx}-e^{ikx})dx$$
$$=\frac{-i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx=-ib_k,$$

như vậy a_k, b_k có thể biểu diễn qua $\hat{f}(k)$ và $\hat{f}(-k)$. Ngược lại ta cũng có $\hat{f}(k)=(a_k-ib_k)/2$.

Giả sử $f\in L_1(T)$, đại lượng

$$S_n(f,x):=\sum_{|k|\;\; n}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

được gọi là tổng Fourier bậc n cũa f. V× $PS_n(f)-fP_{L_1(T)}$ có thể không hội tụ đến không khi $n\to\infty$, nên ta không dùng $S_n(f)$ để xấp xỉ f. Ta có thể khắc phục nhược điểm này như sau:

Với $f,g\in L_1(T)$, tích chập của hai hàm f và g là hàm $f*g$ được xác định bởi

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}}f(x-y)g(y)dy, x\in\mathrm{T}.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
2S_n(f,x) &= \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik(t-x)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sum_{|k|\le n} e^{ikt}dt \\
&= (D_n * f)(x) \quad \text{trong đó } D_n(t) := \sum_{|k|\le n} e^{ikt}.
\end{aligned}
$$

Ta gọi $D_n(t)$ là nhân Dirichlet. Đặt

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x),$$

và

$$F_n(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

Khi đó ta có

$$
\begin{aligned}
2\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(D_k * f)(x) \\
&= (F_n * f)(x). \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Ta gọi $F_n(x)$ là nhân Fejer. Dưới đây là các tính chất đơn giản của nhân Fejer và nhân Dirichlet.

Mệnh đề 4

(i) D_n và F_n là các đa thức lượng giác bậc n.

(ii)

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ và } F_n(x) = \frac{\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}$$

(iii) σ_n là toán tử tuyến tính xác định dương, D_n đổi dấu.

(iv) $P\sigma_n P=1$.

Proof. (i) $D_n(x)$ và $F_n(x)$ là đa thức lượng giác vì

$$D_n(x) = \sum_{|k| \quad n} e^{ikx} \text{ vμ } F_n(x) = \sum_{|k| \quad n} (1 - \frac{|k|}{n+1}) e^{ikx}$$

(ii) Ta có

$$2D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{1} e^{ikx}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \overline{\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}}$$

$$= 1 + 2Re(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx})$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx,$$

nhân cả hai vế với $\sin\frac{x}{2}$ ta có $D_n(x)\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{(2n+1)x}{2}$. Vậy

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Mặt khác ta lại có

$$2F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{(2k+1)x}{2} = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}} \frac{\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Vậy (ii) được chứng minh.

(iii) Hiển nhiên.

(iv) Theo định nghĩa của tích chập, từ (1.3) ta suy ra

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) f(t) dt,$$

do đó

$$\mathrm{P}\sigma_n(f)\mathrm{P}_{C(T)} \quad \mathrm{P}f\mathrm{P}_{C(T)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) dt = \mathrm{P}f\mathrm{P}_{C(T)}.$$

Lấy $f = 1$ thì $\sigma_n(f) = f$, suy ra $\mathrm{P}\sigma_n\mathrm{P} = 1$.

Xấp xỉ bằng toán tử tích phân

Trong mục này ta xét $A = [a, b]$ hoặc $A = \mathrm{T}$. Cho $K_n(x, y), n = 1, 2, \ldots,$ là một dãy các hàm liên tục trên $A \times A$. Ta xác định một toán tử tích phân bởi công thức

$$f_n(x) := \int_A K_n(x, y) f(y) dy. \tag{1.4}$$

Chúng ta muốn biết khi nào $f_n(x) \to f(x)$. Giả thiết rằng

$$\int_A K_n(x, y) dy \to 1 \text{ đều theo x khi } n \to \infty, \tag{1.5}$$

và với mỗi $\delta > 0$,

$$\int_{|x-t| \geq \delta} |K_n(x, y)| dy \to 0 \text{ đều theo x khi } n \to \infty. \tag{1.6}$$

(Khi $A = \mathrm{T}$, miền lấy tích phân ở (2.6) được thay bởi $\delta |x - t| \quad \pi$.) Ta có định lý sau:

Định lý 2.1 *Giả thiết (2.5) và (2.6) được thoả mãn và*

$$\int_A |K_n(x, y)| dy \quad M(x), \quad x \in A, n = 1, 2, \ldots. \tag{1.7}$$

Khi đó với mỗi $f \in C(A), x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$. Sự hội tụ này là đều nếu $M(x)$ không phụ thuộc x.

Proof. Do f là hàm liên tục trên tập compact nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$| f(x) - f(y) | \quad \varepsilon, \quad \forall |x - y| \quad \delta.$$

Đặt

$$\alpha_n(x) := \int_A f(x) K_n(x, y) dy - f(x),$$

từ (2.5) suy ra $\alpha_n(x)$ hội tụ đều về 0 khi $n \to \infty$.

Ta có, với x cố định,

$$2 | f_n(x) - f(x) | = | \int_A (f(y) - f(x)) K_n(x, y) dy + \alpha_n(x) |$$
$$\int_A |(f(y) - f(x))| |K_n(x, y)| dy + |\alpha_n(x)|$$
$$= \int_{|x-y| \geq \delta} |(f(y) - f(x))| |K_n(x, y)| dy +$$
$$\int_{|x-y| \quad \delta} |(f(y) - f(x))| |K_n(x, y)| dy + |\alpha_n(x)|$$
$$\varepsilon(M(x) + 1) + 2\varepsilon \mathrm{P} f \mathrm{P}_{C(A)}$$

Vậy $f_n(x) \to f(x)$, khi $n \to \infty$. Nếu $M(x)$ không phụ thuộc x, thì hiển nhiên sự hội tụ này là đều.

Tương tự như định lý trên ta cũng có định lý sau với cách chứng minh chỉ cần thay tích phân bằng tổng.

Định lý 2.2 *Cho* $K_n(x, s), x \in [0, 1], s = 0, 1, 2, \ldots.$ *là dãy các hàm liên tục trên* $[0, 1]$, *và* $f \in C([0, 1])$, *đặt*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) K_n(x,k).$$

Giả thiết

$$2\sum_{s=0}^{n} K_n(x,s) \to 1 \text{ đều theo x khi n} \to \infty. \tag{1.8}$$

$$\sum_{|s/n-x|\geq\delta} K_n(x,s) \to 0 \text{ đều theo x khi n} \to \infty,\ \delta > 0. \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |K_n(x,k)| \quad M(x). \tag{1.10}$$

Khi đó $f_n(x) \to f(x)$, khi $n \to \infty$. Sự hội tụ này là đều nếu $M(x)$ không phụ thuộc x.

Từ các Định lý trên ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 2.3 *Cho* $f \in C(\mathbb{T})$. *Khi đó* $\sigma_n(f,x)$ *hội tụ đều đến* $f(x)$ *khi* $n \to \infty$.

Proof. Ta có $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy$, do đó chọn

$$K_n(x,y) = \frac{1}{2\pi} F_n(x-y) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 (n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin^2 \frac{x-y}{2}}.$$

Ta có

$$|K_n(x,y)| \quad \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2\delta} \quad \text{vii } \delta |x-y| \quad \pi. \tag{1.11}$$

và

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(x,y) dy = 1, n = 1,2..., \tag{1.12}$$

Từ (2.11) ta suy ra (2.6), (2.12) suy ra (2.5) và (2.7). Theo Định lý 1.2.1 suy ra khẳng định trên.

Hệ quả 2.4 *Cho* $f \in C([0,1])$. *Khi đó* $B_n(f,x)$ *hội tụ đều đến* $f(x)$ *khi* $n \to \infty$.

Proof. Theo định nghĩa của $B_n(f,x)$ ta có

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k},$$

do đó chọn $K_n(x,s) = \binom{n}{s} x^k (1-x)^{n-k} =: p_{n,s}(x)$. Ta có

$$2\sum_{|\frac{s}{n}-x|\ge\delta} K_n(x,s) \le \frac{1}{\delta^2}\sum_{s=0}^{n}\left(\frac{s}{n}-x\right)^2 p_{n,s}(x).$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\left(B_n(e_2,x)-2xB_n(e_1,x)+x^2B_n(e_0,x)\right).$$

Chú ý rằng $B_n(e_0,x)=e_0(x)$; $B_n(e_1,x)=e_1(x)$; $B_n(e_2,x)=e_2(x)+\dfrac{x(1-x)}{n}$, do đó ta suy ra

$$\sum_{|\frac{s}{n}-1|\ge\delta} K_n(x,s) \le \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Mặt khác ta có $\sum_{s=0}^{n} K_n(x,s)=1$ và với mỗi s, $K_n(x,s)$ dương. Vậy theo Định lý 1.2.2 suy ra hệ quả trên.

Nhận xét 2.5 *Từ các hệ quả trên ta lần lượt suy ra các Định lý của Weierstrass cho hàm tuần hoàn và không tuần hoàn.*

Định lý Weierstrass trong không gian Bannach

Cho $A=[a,b]$ hoặc $A=\mathbb{T}$, X là không gian Bannach các hàm số xác định trên A.

Định lý 2.6 *Giả sử không gian Bannach X thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) $C(A)$ là trù mật trong X.

(ii) $C(A)$ được nhúng liên tục trong X, tức là, với mỗi $f\in C(A)$, $\|f\|_X \le C\|f\|_{C(A)}$, trong đó C là hằng số.

Khi đó với $f\in X$, với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại đa thức g (đại số khi $A=[a,b]$, lượng giác khi $A=\mathbb{T}$) sao cho

$$\|f-g\|_X \le \varepsilon.$$

Proof. Do (i) nên tồn tại $h\in C(A)$ sao cho $\|f-h\|_X \le \varepsilon$. Theo Định lý Weierstrass tồn tại đa thức g (đại số khi $A=[a,b]$, lượng giác khi $A=\mathbb{T}$) sao cho $\|h-g\|_{C(A)} \le \varepsilon$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\|f-g\|_X &\le \|f-h\|_X+\|h-g\|_X \\ &\le \varepsilon + C\|h-g\|_{C(A)} \\ &\le \varepsilon(1+C). \end{aligned}$$

Vậy khẳng định được chứng minh.

Hệ quả 2.7 *Định lý Weierstrass đúng trong không gian $L_p(A)$, $1\le p<\infty$.*

Cách xây dựng nhân

Trong phần này chúng ta sẽ trình bầy cách xây dựng các nhân $K_n(x,y)$, $n=1,2,\ldots$ của Định lý 1.2.1

Giả sử rằng $\Lambda \in L_1(\mathrm{R})$, và $\int_{\mathrm{R}} \Lambda(u)du = 1$. Với mỗi $\varepsilon > 0$, ta lấy

$$\Lambda_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\Lambda(u/\varepsilon).$$

Khi đó với mỗi $\delta > 0$, ta có

$$\int_{|x-y|\geq\delta} |\Lambda_\varepsilon(x-y)|\,dy = \int_{|u|\geq\delta/\varepsilon} |\Lambda(u)|\,du \to 0, \text{Khi } \varepsilon \to 0.$$

Bây giờ đặt $K_n(x,y) := \Lambda_{1/n}(x-y)$. Khi đó tất cả các điều kiện của Định lý 1.2.1 được thoả mãn.

Định lý Korovkin

Định lý Korovkin sẽ cung cấp cho chúng ta một cách tiếp cận khác để đi đến các Định lý Weierstrass. Định lý Korovkin khẳng định rằng: Đối với một dãy các toán tử tuyến tính xác định dương $\{U_n\}$ (U_n ,nh x¹ $C(A)$ vào chính nó), sự hội tụ $PU_n(f) - fP_{C(A)} \to 0, \forall f \in C(A)$có thể được suy ra từ sự hội tụ này đối với một dãy hữu hạn các hàm thư

$\{g_n\}_{n=1}^m \subset C(A)$, trong đó A là một không gian compact Hausdorff.

Cho f là một hàm xác định và liên tục trên A, ta viết $f \geq 0$ nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in A$. Khi đó ký hiệu $f \geq g$ được hiểu là $f - g \geq 0$, và hàm $|f|$ được hiểu là $|f|\ (x) = |f(x)|\ ,x \in A$.

Một toán tử U ánh xạ $C(A)$ vào chính nó được gọi là toán tử xác định dương nếu $U(f) \geq U(g)$ với mọi $f \geq g$. Một toán tử tuyến tính xác định dương thì bị chặn, $PUP = PU(1)P$.

Định lý 3.1 *Giả sử rằng tồn tại một dãy các hàm thực liên tục $\{a_i\}_{i=1}^m$ xác định trên A sao cho*

(i)

$_m a_i(y)g_i(x) \geq 0, \forall\ x,y \in A$. (1.13)

(ii)

$P_y(x)$=0nếu và chỉ nếu x=y. (1.14)

Khi đó với mỗi dãy toán tử tuyến tính xác định dương $\{U_n\}$ trên $C(A)$, sự hội tụ

$U_n(g_i) \to g_i, n \to \infty$ $i=1,...,m$ (1.15)

kéo theo

$U_n(f) \to f, n \to \infty, \forall f \in C(A)$.(1.16)

Proof. Xét hàm số $_n a_i g_i(x)$. Lấy hai điểm cố định $y_1, y_2 \in A$ sao cho $y_1 = y_2$. Đặt

$P := P_{y_1} + P_{y_2}$.

Do (3.13) và (3.14) nên $P(x)>0, x \in A$. Nếu tất cả các hàm hệ số $a_i, i=1,...,m$, là hàm hằng, thì do (3.15), $U_n(P,x)$ hội tụ đều theo x đến $P(x)$. Nếu $x = y$, thì do (3.14), (3.15) và các hàm a_i bị chặn, $i=1,...,n$, ta suy ra

$_m a_i(y) g_i(y)=0$,đều theo y.

Chọn số $a>0$ sao cho $1=e_0(x)$„$aP(x), x \in A$. Khi đó

$U_n(e_0,x)$„$aU_n(P,x) \to aP(x), n \to \infty$.

Vì vậy tồn tại một số $M_0>0$ sao cho

$PU_n(e_0)P$„M_0.

Ta cần đến kết quả sau: Cho $f_y \in C(A), y \in A$ là một họ các hàm sao cho $f_y(x)$ là hàm liên tục theo $(x,y) \in A \times A$ và $f_y(y)=0, \forall y \in A$. Khi đó

$U_n(f_y,y) \to 0$,đều theo y khi n $\to \infty$. (1.17)

Để chứng minh (3.17), xét $\varepsilon>0$ và tập đường chéo của $A \times A$, $B:=\{(y,y):y \in A\}$. Mỗi một điểm (a,a) của B có một lân cận V_a trong $A \times A$ sao cho $|f_y(x)| < \varepsilon$, với mọi $(x,y) \in V_a$. Gọi $G = \underset{a \in A}{} V_a$, vì G là một tập mở, nên phần bù F của là tập đóng, do đó F là tập compact (vì A compact). Ta xác định các số m,M bởi

$m := \min_{(x,y) \in F} P_y(x) > 0; M := \max_{(x,y) \in F} |f_y(x)|$.

Nếu $(x,y) \in G$, thì $|f_y(x)| < \varepsilon$. Nếu $(x,y) \in G$, thì $|f_y(x)|$ „$\frac{M}{m} P_y(x)$. Vì vậy

$|f_y(x)|$ „$\varepsilon + \frac{M}{m} P_y(x)$ (1.18)

Từ (3.18) ta có

$2 \mid U_n(f_y,y) \mid$ „$\varepsilon U_n(e_0,y) + \frac{M}{m} U_n(P_y,y)$

„$M_0\varepsilon + \frac{M}{m} U_n(P_y,y)$„$(M_0 + 1)\varepsilon$,với n đủ lớn.

Từ đây suy ra (3.17).

Bây giờ ta có thể hoàn thành việc chứng minh định lý. Với mỗi $f \in C(A)$, đặt

$f_y(x) := f(x) - \frac{f(y)}{P(y)} P(x)$.

Chúng ta vừa mới chỉ ra $U_n(f,y) - \frac{f(y)}{P(y)} U_n(P,y)$ hội tụ đều về không theo y khi $n \to \infty$ và vì $U_n(P,y)$ hội tụ đều đến $P(y)$, nên ta thu được (3.16).

Nhận xét 3.2 *Sử dụng Định lý Korovkin với các hàm thử $g_1=1, g_2 = x, g_3 = x^2$ trên [0,1] và*

$P_y(x) = (y - x)^2 = y^2 g_1 - 2y g_2 + g_3, U_n = B_n,$

trong đó B_n là toán tử Bernstein, ta suy ra Hệ quả 1.2.4.

Tương tự , trên T, ta có thể xét $g_1 = x, g_2 = \cos x, g_3 = \sin x$, và $P_y(x) = 1 - \cos(y - x)$, $U_n = \sigma_n$, áp dụng định lý Korovkin ta suy ra Hệ quả 1.2.3.

Bài tập

Bài tập 1 *Giả thiết Định lý Weierstrass cho hàm tuần hoàn là đã chứng minh, hãy chứng minh $\sigma_n(f,x)$ hội tụ đều đến $f(x)$ khi $n \to \infty$.*

Bài tập 2 *Cho $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ là đa thức đại số, Q_n có bậc m_n , $Q_n(x)$ hội tụ đều đến $f(x)$ khi $n \to \infty$, x $[a,b]$. Chứng minh rằng nếu f không phải đa thức thì $m_n \to \infty$, khi $n \to \infty$*
.

$\in$