Xấp xỉ tốt nhất

Bởi:

Đinh Dũng

Trong chương này, chúng ta nghiên cứu một số vấn đề liên quan đến xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn, không gian Banach, không gian Hilbert như là: Sự tồn tại của phần tử xấp xỉ tốt nhất, tính duy nhất, tính liên tục.

Xấp xỉ tốt nhất trong khụng gian định chuẩn.

Giả sử X là không gian định chuẩn, Y là không gian con đóng của X, $f \in X$. Chúng ta muốn xấp xỉ f bởi các phần tử của Y.

Sai số xấp xỉ f bởi các phần tử của được đo bằng

$$E(f) := E(f, Y, X) := \inf_{\varphi \in Y} \|f - \varphi\|$$

đặc trưng cho xấp xỉ tốt nhất f bằng các phần tử của Y. Nếu infimum đạt được tại $\varphi_0 \in Y$, thì ta nói rằng φ_0 là một xấp xỉ tốt nhất f từ Y. Khi Y là một không gian vectơ con có chiều n, để nhấn mạnh sự phụ thuộc của $E(f)$ vào n, chúng ta ký hiệu $E_n(f)$ thay cho $E(f)$. Tính liên tục của $E(f)$ dễ dàng được trả lời bằng nhận xét sau:

Nhận xét 1.1 *$E(f)$ là hàm liên tục theo f.*

Thật vậy, giả sử $f, g \in X$ và $\varphi \in Y$, ta có

$$\|f - \varphi\| \le \|f - g\| + \|g - \varphi\|.$$

Lấy infimum hai vế của bất đẳng thức này ta được

$$E(f) \le \|f - g\| + E(g).$$

Thay đổi vai trò của f và g ta sẽ có

$$E(g) \le \|f - g\| + E(f).$$

Hai bất đẳng thức cuối cùng nói rằng

$$|E(f) - E(g)| \le \|f - g\|.$$

Vậy $E(f)$ là hàm liên tục của f.

Sự tồn tại của phần tử xấp xỉ tốt nhất

Định lý 1.2 *Cho Y là không gian con hữu hạn chiều của không gian Banach X, $f \in X$. Khi đó tồn tại $\varphi_0 \in Y$ sao cho*

$$E(f) = E(f, Y, X) = \|f - \varphi_0\|$$

Proof. Theo định nghĩa của *inf*, tồn tại dãy $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\| = E(f)$. Ta có $\|\varphi_n\| \le \|f - \varphi_n\| + \|f\|$. Do dãy $\{\|f - \varphi_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ nên tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\|f - \varphi_n\| \le C \; \forall n.$$

Vì vậy $\|\varphi_n\| \le C + \|f\|$. Nhưng do Y là không gian hữu hạn chiều nên tồn tại $\varphi_0 \in Y$ và một dãy con $\{\varphi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sao cho $\|\varphi_{n_k} - \varphi_0\| \to 0$ khi $k \to \infty$. Khi đó $\|f - \varphi_{n_k}\| \to \|f - \varphi_0\|$, vì vậy mà $E(f) = \|f - \varphi_0\|$.

Tính duy nhất của xấp xỉ tốt nhất.

Vấn đề tồn tại xấp xỉ tốt nhất không phải bao giờ cũng gắn liền với tính duy nhất của nó. Trước hết ta cần xét khái niệm sau:

Định nghĩa 1.3 *Chuẩn của X được gọi là chặt nếu với mọi $f, g \in X$, $\alpha, \beta > 0$ thoả mãn $\|f\| = \|g\| = 1, f \neq g, \alpha + \beta = 1$, thì*

$$\|\alpha f + \beta g\| < 1.$$

Khi đó ta gọi X là không gian định chuẩn chặt

Ví dụ 1 *Không gian $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$ là định chuẩn chặt.*

Ví dụ 2 *Không gian $L_p(A)$ với $1 < p < \infty$, là định chuẩn chặt. Khi $p = 1$ hoặc $p = \infty$ thì $L_p(A)$ không định chuẩn chặt*

Định lý 1.4 *Cho X là không gian định chuẩn chặt, Y là không gian con đóng của X, $f \in X$. Khi đó phần tử xấp xỉ tốt nhất f từ Y nếu tồn tại là duy nhất.*

Proof. Giả sử tồn tại hai phần tử khác nhau $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ sao cho

$$\|f - \varphi_1\| = \|f - \varphi_2\| = E(f).$$

Với mỗi $\lambda \in (0,1)$, xét hàm $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in Y$, ta có

$$E(f) \quad \|f - \varphi\| \quad \lambda\|f - \varphi_1\| + (1-\lambda)\|f - \varphi_2\| = E(f).$$

Vậy φ cũng là phần tử xấp xỉ tốt nhất.

Nếu đặt $g_1 = \dfrac{f - \varphi_1}{E(f)}$, $g_2 = \dfrac{f - \varphi_2}{E(f)}$, $g = \lambda g_1 + (1-\lambda) g_2$ thì

$$\|g_1\| = \|g_2\| = 1 \text{ và } \|g\| = 1.$$

Điều này mâu thuẫn với tính định chuẩn chặt của X.

Tính liên tục của phần tử xấp xỉ

Tính liên tục của phần tử xấp xỉ được trả lời bằng định lý sau:

Định lý 1.5 *Giả sử X là không gian Bannach, Y là không gian con hữu hạn chiều của X. Nếu với mỗi $f \in X$ tồn tại duy nhất $P(f)$ là xấp xỉ tốt nhất f từ Y, thì P là ánh xạ liên tục.*

Proof. Giả sử $f_k \to f$ khi $k \to \infty$. Khi đó do X là không gian Bannach nên tồn tại M sao cho

$$\|f_k\| \le M, k = 1,2,3....$$

Ta có $E(f_k) = \|f_k - P(f_k)\| \le \|f_k\|$ suy ra

$$\|P(f_k)\| \le \|f_k - P(f_k)\| + \|f_k\| \le 2M,$$

do đó $P(f_k)$ bị chặn với $k = 1,2....$

Giả sử rằng $P(f_k) \nrightarrow P(f)$ khi $k \to \infty$. Vì dãy $\{P(f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy bị chặn trong không gian hữu hạn chiều nên tồn tại dãy con $\{P(f_{k_s})\}_{s=1}^{\infty}$ sao cho

$$P(f_{k_s}) \to \varphi \neq P(f) \quad \text{khi } s \to \infty.$$

Mặt khác

$$\|P(f_{k_s}) - f_{k_s}\| \le \|P(f) - f_{k_s}\|,$$

chuyển qua giới hạn khi $s \to \infty$ ta có

$$\|\varphi - f\| \le \|f - P(f)\|.$$

Do $P(f)$ là xấp xỉ tốt nhất nên $\|\varphi - f\| = \|f - P(f)\|$. Điều này mâu thuẫn với tính duy nhất của $P(f)$.

Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Hilbert

Giả sử H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Khi đó H cũng là không gian định chuẩn, với chuẩn cảm sinh bởi tích vô hướng, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Định lý 2.1 *Cho H là không gian Hilbert và H_0 là không gian con của H,*

$$\langle f - \varphi, h\rangle = 0 \quad \forall\ h \in H_0.$$

Proof. Giả sử φ là xấp xỉ tốt nhất, và h là một phần tử tuỳ ý, cố định trong H_0. Không giảm tổng quát, ta có thể giả thiết $\langle f - \varphi, h\rangle \geq 0$. Với mọi $\lambda > 0$, ta có

$$2\|f - \varphi\| \quad \|f - \varphi - \lambda h\|$$
$$\Leftrightarrow \|f - \varphi\|^2 \quad \|f - \varphi\|^2 - 2\lambda\langle f - \varphi, h\rangle + \lambda^2\|h\|^2$$
$$\Leftrightarrow \lambda\|h\|^2 \geq 2\langle f - \varphi, h\rangle,$$

cho $\lambda \to 0^+$ ta được $\langle f - \varphi, h\rangle = 0$. Ngược lại, với mỗi $g \in H_0$, ta có

$$2\|f - g\|^2 = \|f - g + \varphi - \varphi\|^2$$
$$= \|f - \varphi\|^2 + \|g - \varphi\|^2 \geq \|f - \varphi\|^2.$$

Suy ra $\|f - \varphi\| \quad \|f - g\|, \forall\ g \in H_0$. Vậy φ là xấp xỉ tốt nhất f.

Bây giờ xét không gian Hilbert tách được H. Khi đó tồn tại cơ sở trực chuẩn đếm được $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$. Mỗi $f \in H$ có một biểu diễn

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{2.1}$$

Các đại lượng $\hat{f}_k = \langle f, \varphi_k\rangle$ được gọi là hệ số Fourier của f. Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k$ được gọi là chuỗi Fourier của f. Mỗi $f \in H$ thoả mãn đẳng thức Parsaval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Xét n hàm đầu tiên trong cơ sở trên, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Chúng ta muốn xấp xỉ f bởi không gian con

$$H_n := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Khi đó sai số xấp xỉ sẽ là

$$E_n(f) = \inf_{\{c_k\}_{k=1}^{n}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|.$$

Định lý 2.2 *Giả sử φ^* là xấp xỉ tốt nhất f từ H_n. Khi đó $\varphi^* = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k \varphi_k$, và sai số xấp xỉ*

$$E_n(f) = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2)^{1/2}.$$

Proof. Giả sử $\varphi^* = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ là xấp xỉ tốt nhất. Theo Định lý 2.2.1 ta có

$$\langle f - \varphi^*, \varphi_j \rangle = 0 \; \forall \; j = 1,...n.$$

Do đó

$$2\langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall \; j = 1,...n.$$

$$\Leftrightarrow \langle \sum_{k=1}^{n} (\hat{f}_k - c_k)\varphi_k, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall \; j = 1,...n.$$

Suy ra $\hat{f}_k = c_k, \forall \; k = 1,...n.$ Từ đẳng thức Parsaval, sai số xấp xỉ là

$$E_n(f) = \| f - \varphi^* \| = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2)^{1/2}.$$

Vậy định lý được chứng minh.

Nhận xét 2.3 *Khi n hệ số Fourier đầu tiên của f là rất nhỏ hoặc triệt tiêu, không suy ra $\|f\|$ nhỏ. Nhưng $\|\varphi^*\|$ cũng rất nhỏ. Khi đó $E_n(f) \approx \|f\|$, vì thế mà φ^* trở nên không có ý nghĩa. Chúng ta có thể khắc phục khiếm khuyết này bằng cách dùng xấp xỉ phi tuyến.*

Xấp xỉ phi tuyến trong không gian Hilbert

Cho không gian Hilbert H, $M \subset H$ ta đã biết sai số xấp xỉ tốt nhất $f \in H$ bằng các phần tử của M là

$$E(f) = E(f, M, H) = \inf_{g \in M} \|f - g\|.$$

Khi M không có cấu trúc tuyến tính thì ta gọi là xấp xỉ phi tuyến, còn khi M là một đa tạp tuyến tính thì ta gọi là xấp xỉ tuyến tính.

Xét đa tạp phi tuyến

$$M_n = \{\varphi = \sum_{k \in Q} c_k \varphi_k, \quad |Q| = n, Q \subset \mathbb{N}\}.$$

Ta có thể chọn ra n hệ số Fourier lớn nhất và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần:

$$|\hat{f}_{k_1}| \geq \ldots \geq |\hat{f}_{k_n}|.$$

Đặt $\varphi^* = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_{k_j} \varphi_{k_j}$. Ta chứng minh φ^* là xấp xỉ tốt nhất.

Ta có, với $\varphi \in M_n$,

$$\|f - \varphi\|^2 = \sum_{k \in Q} |\hat{f}_k - c_k|^2 + \sum_{k \in Q} |\hat{f}_k|^2 \geq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\hat{f}_{k_j}|^2.$$

Lấy infimum hai vế ta thu được

$$E(f, M_n, H) = (\sum_{j=n+1}^{\infty} |\hat{f}_{k_j}|^2)^{1/2}$$

và φ^* là xấp xỉ tốt nhất.

Xấp xỉ phi tuyến trong không gian Hilbert

Giả sử rằng X là một không gian định chuẩn. Khi đó không gian liên hợp X^* của X cũng là không gian định chuẩn, chuẩn của phiếm hàm tuyến tính $\lambda \in X^*$ được xác định bởi

$$\|\lambda\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |\lambda(f)|.$$

Xét họ hàm $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset X$, đặt $Y := \operatorname{span}\Phi$ và

$$\Phi^{\perp} = \{\lambda \in X^* : \lambda(\varphi) = 0, \varphi \in \Phi\}.$$

Chúng ta muốn xấp xỉ $f \in X$ bằng các phần tử của Y. Trước hết ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.1 *Nếu hệ hàm $f^1, \dots, f^n \in X$ là độc lập tuyến tính, thì tồn tại hệ song trực chuẩn $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in X^*$ sao cho*

$$\lambda^i(f^j) = \delta_{i,j}, \; i, j = 1, \dots, n.$$

Proof. Chứng minh bằng quy nạp.

Khi $n = 1$, theo Định lý Hahn-Bannach khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với $k < n$. Chúng ta cần chứng minh khẳng định đúng với $k = n$.

Theo gải thiết quy nạp, hệ $f^2, \dots, f^n$, có hệ song trực chuẩn là $\lambda^2, \dots, \lambda^n$. Đặt $Y = \operatorname{span}\{f^2, \dots, f^n\}$. Điều cần chứng minh tương đương với tồn tại $\lambda^1 \in Y^{\perp}$ sao cho $\lambda^1(f^1) \neq 0$.

Giả thiết phản chứng với mọi $\lambda \in Y^{\perp}$, $\lambda^1(f^1) = 0$. (*).

Ta có với mỗi $\lambda \in X^*$,

$$\lambda - \sum_{k=2}^{n} \lambda(f^k)\lambda^k \in Y^{\perp}.$$

Khi đó theo (*), suy ra $(\lambda - \sum_{k=2}^{n} \lambda(f^k)\lambda^k)(f^1) = 0$. Do đó $f^1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k(f^1) f^k$, vô lý với tính độc lập tuyến tính.

Định lý 3.2 *(Nikolsky) Sai số xấp xỉ f bằng các phần tử của Y được xác định bằng công thức*

$$E(f, Y, X) = \inf_{\{c_k\}_{k=1}^{n}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\| = \sup_{\substack{\lambda \in \Phi^{\perp} \\ \|\lambda\| = 1}} |\lambda(f)|.$$

Proof. Ta có Y là không gian tuyến tính sinh bởi Φ nên $Y^{\perp} = \Phi^{\perp}$. Với mỗi $g \in Y$ và $\lambda \in \Phi^{\perp}, \|\lambda\| = 1$, ta có

$$2\,|\lambda(f)| = |\lambda(f - g)| \le |\lambda|\,\|f - g\| = \|f - g\|$$

$$\Rightarrow |\lambda(f)| \le \|f - g\|$$

$$\Rightarrow |\lambda(f)| \le E(f, Y, X),$$

do đó

$$\sup_{\substack{\lambda \in \Phi^{\perp} \\ \|\lambda\| = 1}} |\lambda(f)| \le E(f, Y, X).$$

Để chứng minh chiều ngược lại của bất đẳng thức này không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết dãy $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ độc lập tuyến tính. Khi đó Φ là cơ sở của Y, và theo bổ đề trên, tồn $\lambda^1,\dots,\lambda^n$ là hệ song trực chuẩn của Φ.

Mỗi $f \in X$ được xét như một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X^*. Ký hiệu $\overline{f}$ là hạn chế của f trên $Y^\perp$, tức là $\lambda(f) = \lambda(\overline{f})$ với mọi $\lambda \in Y^\perp$.

Với mỗi dãy $c = \{c_k\}_{k=1}^n$, đặt

$$g_c := f - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k.$$

Ta có, với mọi $\lambda \in Y^\perp$,

$$\lambda(g_c) = \lambda(f) - \sum_{k=1}^n c_k\lambda(\varphi_k) = \lambda(f) = \lambda(\overline{f}),$$

do đó g_c là một thác triển của $\overline{f}$ lên X^*. Ngược lại giả sử g là một thác triển của $\overline{f}$ lên X^*. Ta có với mỗi $\lambda \in X^*$ thì

$$\lambda - \sum_{k=1}^n \lambda(\varphi_k)\lambda_k \in Y^\perp.$$

Do g là thác triển của $\overline{f}$ và $\overline{f}$ là hạn chế của f trên $Y^\perp$ nên ta có

$$2(\lambda - \sum_{k=1}^n \lambda(\varphi_k)\lambda_k)(g) = (\lambda - \sum_{k=1}^n \lambda(\varphi_k)\lambda_k)(\overline{f})$$
$$= (\lambda - \sum_{k=1}^n \lambda(\varphi_k)\lambda_k)(f), \quad \forall\, \lambda \in X^*.$$

Suy ra

$$\lambda(g) = \lambda(f) - \sum_{k=1}^n [\lambda_k(g) - \lambda_k(f)]\lambda(\varphi_k),$$

đẳng thức này đúng với mọi $\lambda \in X^*$. Do đó ta phải có

$$g = f - \sum_{k=1}^n \lambda_k(g-f)\varphi_k.$$

Vậy mọi thác triển của $\overline{f}$ lên X^* đều có dạng

$$g_c = f - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k.$$

Mặt khác theo Định lý Hahn-Bannach, tồn tại thác triển g của $\overline{f}$ sao cho $\|\overline{f}\| = \|g\|$. Theo chứng minh trên tồn tại $g_c = f - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k$ sao cho $g_c = g$. Suy ra

$$\|g\| = \| f - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k \| \geq E(f,Y,X).$$

Nhưng

$$\|g\| = \|\overline{f}\| = \sup_{\substack{\|\lambda\|=1\\ \lambda\in Y^\perp}} |\lambda(\overline{f})| = \sup_{\substack{\|\lambda\|=1\\ \lambda\in Y^\perp}} |\lambda(f)|.$$

Từ đây ta suy ra khẳng định được chứng minh.

Ta đã biết $\mathbb{T}_n$ là tập các đa thức lượng giác bậc n, và

$$E(f,\mathbb{T}_n,L_p(\mathbb{T})) = E_n(f) = \inf_{\varphi\in\mathbb{T}_n} \|f-\varphi\|_{L_p(\mathbb{T})} =: E_n(f)_p$$

là sai số xấp xỉ tốt nhất f bởi $\mathbb{T}_n$. Hơn nữa $\lim_{n\to\infty} E_n(f)_p = 0$. Ta muốn biết khi nào có tốc độ hội tụ bằng $O(n^{-1})$. Câu trả lời là định lý sau:

Định lý 3.3 *Nếu $f\in L_p(\mathbb{T})$ và $f'\in L_p(\mathbb{T})$, thì $E_n(f)_p \le C\frac{1}{n}$.*

Ta sẽ chứng minh cho trường hợp $p=2$, khi $p\neq 2$ sẽ được chứng minh trong Chương 4. Trong Định lý 2.2.2 ta đã tính được sai số xấp xỉ

$$E_n(f)_2 = \Big(\sum_{|k|>n} |\hat{f}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Vì $\hat{f}_k = \dfrac{\hat{f}'}{in}$, nên

$$E_n(f)_2 = \Big(\sum_{|k|>n} \Big|\frac{\hat{f}'}{in}\Big|^2\Big)^{1/2} \le \frac{1}{n}\|f'\|_2.$$

Vậy khi $p=2$ định lý được chứng minh.

Nhận xét 3.4 *Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng nếu $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{T})$, thì $E_n(f)_2 \le Cn^{-r}$.*

Theo nhận xét này ta thấy hàm càng trơn thì tốc độ xấp xỉ càng nhanh. Trong các chương tiếp theo ta sẽ nghiên cứu vấn đề ngược lại. Bài toán tìm mối quan hệ giữa độ trơn của hàm số và tốc độ xấp xỉ là một trong những bài toán trọng tâm của lý thuyết xấp xỉ.

Bài tập cuối chương

Bài tập 1 *Chứng minh rằng không gian* $L_p(A)$ *là định chuẩn chặt với* $1 < p < \infty$ *và không định chuẩn chặt khi* $p = 1, \infty$.

Bài tập 2 *Với* $f, g \in L_1(\mathrm{T})$, *ký hiệu*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{T}} f(y) g(x-y) dy.$$

Chứng minh rằng phép toán (tích chập) có các tính chất sau:

1. $f * g \in L_1(\mathrm{T})$.
2. $f * g = g * f$.
3. $(f+g) * h = f * h + g * h$.
4. $(\lambda f) * g = \lambda (f * g), \quad \lambda \in \mathrm{R}$.

Bài tập 3 *Chứng minh rằng nếu* $f \in L_1(\mathrm{T})$ *và* $g \in \mathrm{T}_n$, *thì* $f * g \in \mathrm{T}_n$.

Bài tập 4 *Chứng minh rằng, nếu* φ *là đa thức lượng giác bậc nhỏ hơn* n, *thì*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$