Các phép tính đối với các biểu diễn

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Từ hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ của một nhóm G, ta có thể thiết lập được một biểu diễn gọi là tích của chúng và ký hiệu là $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$. Từ một biểu diễn T nào đó của nhóm G ta có thể thiết lập được một biểu diễn $\tilde{T}$ gọi là biểu diễn liên hợp với biểu diễn T. Các biểu diễn này có các định nghĩa như sau.

Định nghĩa tích của hai biểu diễn

Cho hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ của một nhóm hữu hạn G trong các không gian vectơ L_1 và L_2 với các hệ vectơ cơ sở $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{d1}^{(1)}$, và $e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{d2}^{(2)}$, d_1 và d_2 là thứ nguyên của L_1 và L_2. Tích của hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ là biểu diễn T trong không gian $L_1 \otimes L_2$ thứ nguyên $d_1 d_2$ với hệ vectơ cơ sở.

$$f_{(ik)} = e_i^{(1)} \otimes e_k^{(2)}, \; i = 1, 2, \ldots, d_1, \; k = 1, 2, \ldots, d_2, \qquad (11)$$

mà toán tử $T(\alpha)$ tương ứng với yếu tố α của nhóm G được xác định như sau

$$T(a) \left(e_i^{(1)} \otimes e_k^{(2)}\right) = \left(T^{(1)}(a) e_i^{(1)}\right) \otimes \left(T^{(2)}(a) e_k^{(2)}\right), \qquad (12)$$

trong đó $T^{(1)}(a)$ và $T^{(2)}(a)$ là hai toán tử trong hai không gian L_1 và L_2 tương ứng với yếu tố a của nhóm G. Ta viết

$T = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$.

Để chứng minh rằng các toán tử $T(a)$ tạo thành một biểu diễn của nhóm G, nghĩa là thỏa mãn điều kiện bảo toàn phép nhân nhóm

$T(a)\, T(b) = T(ab)$,

ta chỉ cần dùng định nghĩa (12) và tính chất bảo toàn phép nhân nhóm của các biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$, cụ thể là

$T^{(\alpha)}(a)\, T^{(\alpha)}(b) = T^{(\alpha)}(ab)$, $\alpha = 1, 2$

Ký hiệu các yếu tố ma trận của toán tử $T^{(1)}(a)$ và $T^{(2)}(a)$ trong các hệ vectơ cơ sở đã cho $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{d1}^{(1)}$ và $e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{d2}^{(2)}$ là $T_{ij}^{1}(a)$ và $T_{kl}^{2}(a)$:

$T^{(1)}(a)\, e_i^{(1)} = e_j^{(1)} T_{(ji)}^{(1)}(\alpha)$

$T^{(1)}(a)\, e_k^{(2)} = e_l^{(2)} T_{(lk)}^{(2)}(\alpha)$

Ta có

$T(a)f(ik) = T(a)(e_i^{(1)} \otimes e_k^{(2)}) = (T^{(1)}(a)\, e_i^{(1)}) \otimes (T^{(2)}(a)\, e_k^{(2)}) = (e_j^{(1)} \otimes e_l^{(2)})\, T_{(ji)}^{(1)}(\alpha)\, T_{(lk)}^{(2)}(\alpha) =$

$f(jl) T_{(ji)}^{(1)}(\alpha)\, T_{(lk)}^{(2)}(\alpha)$

So sánh hai biểu thức của $T(a)\, f(ji)$, ta thu được hệ thức diễn tả các yếu tố ma trận toán tử $T(a)$ qua các yếu tố ma trân các nhóm toán tử $T^{(1)}(a)$ và $T^{(2)}(a)$

$$T_{(jl)(ik)}(a) = T_{(ji)}^{(1)}(a)\, T_{(lk)}^{(2)}(\alpha). \qquad (13)$$

Cho hai biểu diễn (unita) tối giản $T^{(\alpha)}$ và $T^{(\beta)}$ của một nhóm G nào đó trên các không gian $L^{(\alpha)}$ và $L^{(\beta)}$ với thứ nhiệm $d^{(\alpha)}$ và $d^{(\beta)}$. Tích

$T = T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)}$

của hai biểu diễn này là một biểu diễn unita trên không gian

$L = L^{(\alpha)} \otimes L^{(\beta)}$

Nếu T không phải là tối giản thì nó hoàn toàn khả quy và có thể phân tách thành tổng trực giao của các biểu diễn tối giản $T^{(\gamma)}$ trên các không gian $L^{(\gamma)}$ thứ nguyên $d^{(\gamma)}$. Trong số các biểu diễn tối giản T này có thể có các biểu diễn tương đương với nhau. Không gian L thực hiện biểu diễn T là tổng trực giao của các không gian con $L^{(\gamma)}$ thực hiện các biểu diễn tối giản $T^{(\gamma)}$

$L = \sum_\gamma \oplus L^{(\gamma)}$.

Thứ nguyên của L là

$d = \sum_\gamma d(\gamma)$.

Mặt khác

$d = d^{(\alpha)} d^{(\beta)}$

Vậy ta có hệ thức

$$d^{(\alpha)} d^{(\beta)} = \sum_{\gamma} d^{(\gamma)} \qquad (14)$$

Ký hiệu các hệ vectơ đơn vị cơ sở trong các không gian $L^{(\alpha)}$, $L^{(\beta)}$, $L^{(\gamma)}$, v.v… là

$e_{i\alpha}^{(\alpha)}$, $ia = 1, 2, \ldots, d^{(\alpha)}$

$e_{i\beta}^{(\beta)}$, $ia = 1, 2, \ldots, d^{(\beta)}$

$e_{i\gamma}^{(\gamma)}$, $ia = 1, 2, \ldots, d^{(\gamma)}$

v.v… Trong không gian L các vectơ có dạng

$e_{i\alpha}^{(\alpha)} \otimes e_{i\beta}^{(\beta)}$

tạo thành một vectơ cơ sở trực giao chuẩn hóa Tập hợp tất cả các vectơ $e_{i\gamma}^{(\gamma)}$, $i\gamma = 1, 2, \ldots, d^{(\gamma)}$, với mọi chỉ số γ có mặt trong vế phải công thức (14) cũng là một hệ các vectơ cở sở trực giao chuẩn hóa khác trong không gian L. Giữa các vectơ đơn vị của hai hệ này ta có các phép biến đổi unita sau đây

$$e_{i\alpha}^{(\alpha)} \otimes e_{i\beta}^{(\beta)} = \sum_{\gamma} \sum_{i_\gamma} C_{\alpha i_\alpha \beta i_\beta}^{\gamma i_\gamma} e_{i_\gamma}^{(\gamma)} \qquad (15)$$

$$e_{i\gamma}^{(\gamma)} = \sum_{i_\alpha} \sum_{i_\beta} C_{\alpha i_\alpha \beta i_\beta}^{\gamma i_\gamma *} e_{i_\alpha}^{(\alpha)} \otimes e_{i_\beta}^{(\beta)} \qquad (16)$$

Các hệ số $C_{\alpha i_\alpha \beta i_\beta}^{\gamma i_\gamma}$ trong các phép biến đổi (15) và (16) gọi là các hệ số Clebsh-Gordan.

Bây giờ ta đưa vào khái niệm biểu diễn $\tilde{T}$ liên hợp với một biểu diễn T đã cho. Giả sử $T(a)$ là các toán tử tuyến tính của biểu diễn T của nhóm G trong không gian vectơ L. Với mỗi yếu tố a của nhóm G ta hãy thiết lập toán tử sau đây

$$\tilde{T}(a) = \left[T(a^{-1})\right]^T. \qquad (17)$$

Với các yếu tố ma trận

$$\tilde{T}_{ij}(a) = T_{ji}(a^{-1}) \qquad (18)$$

Ta hãy thử lại bằng sự tương ứng giữa các yếu tố a của nhóm G và các toán tử $\tilde{T}$(a) bảo toàn phép nhân nhóm. Thực vậy, ta có

$$\tilde{T}(ab) = \left[T(ab)^{-1})\right]^T = \left[T(b^{-1})T(a^{-1})\right]^T = \left[T(a^{-1})\right]^T\left[T(b^{-1})\right]^T = \tilde{T}(a)\,\tilde{T}(b).$$

Vậy toán tử $\tilde{T}$(a) cũng tạo thành một biểu thức biểu diễn của nhóm G. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa biểu diễn liên hợp

Cho hai biểu diễn T và $\tilde{T}$ của cùng một nhóm G trong hai không gian vectơ L và $\tilde{L}$. Nếu trong hai không gian L và $\tilde{L}$ ta có thể chọn hai hệ vectơ cơ sở một cách thích hợp để các yếu tố ma trận $Tij(a)$ và $\tilde{T}ij(a)$ của các toán tử $T(a)$ và $\tilde{T}(a)$ của hai biến đổi này liên hệ với nhau bởi công thức

$\tilde{T}ij(a) = T_{ji}(a^{-1})$,

thì ta gọi T và $\tilde{T}$ là hai biểu diễn liên hợp với nhau.

Việc xét đồng thời hai biểu diễn liên hợp với nhau T và $\tilde{T}$ cho phép ta thiết lập được một đại lượng bất biến đối với phép biến đổi của nhóm G. Thực vậy, trong hai không gian L và $\tilde{L}$thực hiện hai biểu diễn liên hợp với nhau T và $\tilde{T}$ ta hãy chọn các hệ vectơ cơ sở e_1, e_2, …, edvà f_1, f_2, …., fd để co các yếu tố ma trận của các toán tử T(a) và $\tilde{T}$(a) thỏa mãn hệ thức (18). Trong không gian vectơ d^2 chiều $L\otimes\tilde{L}$ ta hãy xét vectơ sau đây.

Các phép tính đối với các biểu diễn

$$i = \sum_{m=1}^{d} e_m \otimes f_m \,. \qquad (19)$$

Ký hiệu tích của hai biểu diễn T và $\tilde{T}$ và $T \otimes \tilde{T}$. Các hoán tử của biểu diễn này tác dụng lên các vectơ cơ sở của không gian tích $L \otimes \tilde{L}$ như sau

$(T \otimes \tilde{T})\ (a)\ (e_i \otimes f_j) = (T(a)e_i) \otimes (\ \tilde{T}(a)f_j) = (e_k \otimes f_l)\ T_{ki}(a)\ \tilde{T}_{lj}(a)$

Tác dụng của các hoán tử đó lên vectơ i xác định bởi công thức (19) và dùng hệ thức (18) giữa các yếu tố ma trận của các hoán tử $T(a)$ và $\tilde{T}$(a), ta có

$(T \quad \tilde{T}\,)\ (a)\ i = (T(a)e_{\,m}\,) \quad (\,\tilde{T}\,(a)f_{\,m}\,) = e_{\,k} \quad f_{\,l}\, T_{\,km}\,(a)\ \tilde{T}_{\,lm}\,(a) = e_{\,k} \quad f_{\,l}\, T_{\,km}\,(a) T_{\,ml}\,(a\text{-}1) = e_{\,k} \quad f_{\,l}\, T_{\,kl}\,(e) = e_{\,k} \quad f_{\,k} = i$

Vậy ta có định lý sau

Định lý. *Vectơ*

$i = \sum_{m=1}^{d} e_m \otimes f_m$

trong không gian L $\tilde{L}$ thực hiện biểu diễn T $\tilde{T}$ của nhóm G bất biến đối với mọi phép biến đổi (T $\tilde{T}$)(a) của biểu diễn tích T $\tilde{T}$. Do đó không gian con một chiều với vectơ đơn vị i thực hiện một biểu diễn tối gian một chiều chứa trong biểu diễn T $\tilde{T}$.

Hệ quả. *Biểu diễn T $\tilde{T}$, là tích của một biểu diễn T và biểu diễn $\tilde{T}$ liên hợp với nó, bao giờ cũng chứa biểu diễn tối giản một chiều.*

Biểu diễn tối giản một chiều được thiết lập trong khi chứng minh định lý vừa trình bày ở trên thường diễn tả các đại lượng vật lý biến đổi với các phép biến đổi nhóm đối xứng. Do đó trong các bài toán vật lý ta thường sử dụng khái niệm biểu diễn liên hợp.

Tích của hai biểu diễn của nhóm Lie. Cho hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ của nhóm Lie G trong hai không gian vectơ L_1 và L_2, T là tích của hai biểu diễn này. Các toán tử $T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ của biểu diễn T có dạng

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) = T^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) \otimes T^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\,. \qquad (20)$$

⊗

Ký hiệu các vi tử của các biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ là X_j^1 và X_j^2, $j = 1, 2, \ldots$, s của biểu diễn T là Xj, $j = 1, 2, \ldots, s$. Với các thông số α_j vô cùng bé ta có

$$\begin{aligned} T^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) &= I^{(1)} - i\sum_{j=1}^{s}\alpha_j X_j^{(1)}, \\ T^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) &= I^{(2)} - i\sum_{j=1}^{s}\alpha_j X_j^{(2)}, \end{aligned} \qquad (21)$$

trong đó $I^{(1)}$ và $I^{(2)}$ là các toán tử đơn vị trong các không gian L_1 và L_2. Thay các biểu thức (21) vào trong vế phải công thức (20) và chỉ giữ lại các số hạng cấp một theo các thông số α_j, ta có

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) = I - i\textstyle\sum_{j=1}^{s} \alpha j\left[X_j^{(1)}\otimes I^{(2)} + I^{(1)}\otimes X_j^{(2)}\right],$$

trong đó

$$I = I^{(1)}\otimes I^{(2)}$$

là toán tử đơn vị trong không gian $L = L^{(1)}\otimes L^{(2)}$. So sánh với định nghĩa của các vi tử X_j ,

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s) \approx I - i\sum_{j=1}^{s}\alpha_j X_j \qquad (22)$$

ta suy ra

$$X_j = X_j^{(1)}\otimes I^{(2)} + I^{(1)}\otimes X_j^{(2)} \qquad (23)$$

Để viết hệ thức này dưới dạng chứa tường minh các yếu tố ma trận trong hai không gian L_1 và L_2 ta hãy chọn hai hệ vectơ cơ sở e_m^1, $m = 1, 2, \ldots, d_1$ và e_p^2, $p = 1, 2, \ldots, d_2$, sau đó ta lấy các vectơ sau đây

$$e_{(mp)} = e_m^{(1)}\otimes e_p^{(2)}$$

trong không gian $L = L_1\otimes L_2$, $m = 1, 2,\ldots, d_1$, $p = 1, 2, \ldots, d_2$, làm hệ cơ sở của không gian này. Ký hiệu các yếu tố ma trận của các toán tử $X_j^{(1)}$, $X_j^{(2)}$ và Xj đối với các hệ cơ sở tương ứng nói trên vectơ là $(X_j^{(1)})_{mm'}$, $(X_j^{(2)})_{pp'}$, và $(X_j)_{(mp)(m'p')}$. Công thức (23) cho ta

$$(X_j)_{(mp)(m'p')} = (X_j^{(1)})_{mm'}\delta_{pp'} + \delta_{mm'}(X_j^{(2)})_{pp'} \qquad (24)$$

Cuối cùng, ta xét hai biểu diễn liên hợp với nhau T và $\tilde{T}$ của một nhóm Lie G và ký hiệu các toán tử của hai biểu diễn này là $T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ và $\tilde{T}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, ký hiệu các vi tử tương ứng với các tham số thực độc lập α_j là X_j và $\tilde{X}_j$. Chú ý rằng nếu a là một yếu tố của G với các tham số vô cùng bé α_j thì trong phép gần đúng cấp một yếu tố với các tham số $-\alpha_j$ sẽ là nghịch đảo a^{-1} của a. Do đó ta có các công thức

$$T(a) = T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) \approx I - i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j \qquad (25)$$

$T(a^{-1})$ approx: 2 args.$T(-\alpha_1, -\alpha_2,..., -\alpha_s)$ approx: 2 args.$I + i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j$

và do đó

$$\left[T(a^{-1})\right]^T \approx \left[T(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_s)\right]^T \approx I + i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j^T \qquad (26)$$

Mặt khác

$$\tilde{T}(a) = \tilde{T}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) \approx I - i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \tilde{X}_j. \qquad (27)$$

Theo định nghĩa các biểu diễn liên hợp với nhau ta phải có

$$\tilde{T}(a) = \left[T(a^{-1})\right]^T$$

Thay vào đây các biểu thức (26) và (27), ta thu được hệ thức liên hệ các vi tử X_j và $\tilde{X}_j$ của hai biểu diễn liên hợp với nhau:

$$\tilde{X}_j = -X_j^T. \qquad (28)$$

Nếu biết các vi tử của một biểu diễn T nào đó, dùng hệ thức (28) ta thiết lập được ngay các vi tử của biểu diễn $\tilde{T}$ liên hợp với T.