Phụ lục cơ sở lý thuyết nhóm

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Trong phụ lục này chúng ta trình bày thêm một số khái niệm và chứng minh một số mệnh đề chung trong lý thuyết nhóm.

Từ định nghĩa nhóm suy ra ngay một số mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1

Mỗi nhóm chỉ cố một yếu tố đơn vị.

Chứng minh. Giả sử trong nhóm G có hai yếu tố đơn vị là e_1 và e_2. Theo định nghĩa yếu tố đơn vị thì với mọi yếu tố aG ta luôn có

$e_1 a = a,$

$a e_2 = a$

Trong hệ thức thứ nhất hãy lấy $a = e_2$ và có

$e_1 e_2 = e_2$,

còn lại trong hệ thức thứ hai hãy lấy $a = e_1$ và có

$e_1 e_2 = e_1$

Vậy e_1 phải trùng với e_2 , $e_1 = e_2$

Mệnh đề 2

Nghịch đảo của tích của hai yếu tố bằng tích các nghịch đảo của chúng theo thứ tự ngược lại, nghĩa là

$(a b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Chứng minh. Thực vậy, ta có

$b^{-1}a^{-1}a\,b = b^{-1}b = e$

$a\,b\,b^{-1}a^{-1} = a\,a^{-1} = e$

Vậy $b^{-1}a^{-1}$ là nghịch đảo của $a\,b$.

Mệnh đề 3

Nếu a và b là hai yếu tố khác nhau của nhóm G,

$a \neq b$

thì với mọi yếu tố c in: 2 args.*G ta luôn luôn có*

*c a*neq: 2 args.*c b*, *a c*neq: 2 args.*b c*

Chứng minh. Ta thấy giả sử ngược lại rằng có một yếu tố *c* nào đó mà

$c\,a = c\,b.$

Nhân cả hai vế hệ thức này với c^{-1} từ bên trái và chú ý rằng $c^{-1}c = e$, ta có

$c^{-1}ca = ea = c^{-1}c\,b = e\,b$

nghĩa là $a = b$, trái với giả thiết. Tương tự như vậy, nếu có một yếu tố *c* nào đó mà

a c = b c

thì sau khi nhân cả hai vế của hệ thức này từ bên phải với c^{-1}, chú ý rằng $c\,c^{-1} = e$, ta sẽ có

$a\,c\,c^{-1} = a\,e = b\,c\,c^{-1} = b\,e$

nghĩa là lại có $a = b$, trái với giả thiết.

Mệnh đề 4

Mỗi yếu tố của nhóm chỉ có một yếu tố nghịch đảo.

Chứng minh. Ta giả sử rằng một yếu tố a nào đó của nhóm G có hai yếu tố nghịch đảo ký hiệu là

$a_1^{-1}a = e,$

$aa_2^{-1} = e.$

Nhân cả hai vế của hệ thức thứ nhất với a_2^{-1} từ bên phải và nhân cả hai vế của hệ thức thứ hai với a_1^{-1} từ bên trái, ta được

$a_1^{-1}aa_2^{-1} = ea_2^{-1} = a_2^{-1},$

$a_1^{-1}aa_2^{-1} = a_1^{-1}e = a_1^{-1}.$

Vậy ta phải có $a_1^{-1} = a_2^{-1}$

Định nghĩa yếu tố liên hợp

Yếu tố a của nhóm G được gọi là liên hợp với yếu tố b của nhóm này nếu có một yếu tố nào đó $c$in: 2 args.G mà

$c\,a\,c^{-1} = b$

Mệnh đề

Quan hệ liên hợp là một quan hệ tương đương, nghĩa là

1) Nếu a liên hợp với b thì b liên hợp với a (tính đối xứng).

2) Yếu tố a liên hợp với chính nó (tính tự liên hợp),

3) Nếu a liên hợp với b, b liên hợp với c thì a liên hợp với c (tính chuyển tiếp).

Chứng minh.

1) Yếu tố a liên hợp với yếu tố b có nghĩa là có một yếu tố c nào đó mà

$c\,a\,c^{-1} = b$

Khi đó

$c^{-1}b\,(c^{-1})^{-1} = a,$

nghĩa là a^{-1} liên hợp với b^{-1}

2) Với mọi yếu tố $a$in: 2 args.G ta luôn có

$e\, a\, e^{-1} = a$,

nghĩa là a tự liên hợp với chính nó.

3) Nếu a liên hợp với b, b liên hợp với c thì có hai yếu tố d và f nào đó mà

$d\, a\, d^{-1} = b, f\, b\, f^{-1} = c$,

Khi đó

$f\, d\, a\, d^{-1} f^{-1} = c, (f\, d)\, a\, (f\, d)^{-1} = c$,

nghĩa là a liên hợp với c.

Định nghĩa lớp lân cận của nhóm con

Giả sử nhóm G có một nhóm con G_1 gồm những yếu tố $g_0 = e, g_1, g_2, \ldots$, và cho a là một yếu tố bất kỳ của nhóm G. Tập hợp các yếu tố $a, ag_1, ag_2, \ldots$, thu được bằng cách nhân tất cả các yếu tố của G_1 với a từ bên trái được gọi là lớp lân cận trái của G_1 và ký hiệu là

$aG_1 : \{ag_i \mid g_i \in G_1\}$.

Tương tự như vậy, tập hợp các yếu tố $a, g_1 a, g_2 a \ldots$, thu được bằng cách nhân tất cả các yếu tố của G_1 với a từ bên phải được gọi là lớp lân cận phải của G_1 và ký hiệu là

$G_1 a$: $\{g_i a \mid g_i \in G_1\}$

Mệnh đề

Hai lớp lân cận trái (phải) hoặc không có một lớp yếu tố chung nào, hoặc hoàn toàn trùng nhau.

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề đối với lớp lân cận trái. Với lớp lân cận phải có thể lặp lại lý luận tương tự. Giả sử hai lớp lân cận trái aG_1 và $b\, G_1$ của nhóm con G_1 có một yếu tố chung, nghĩa là có hai yếu tố g_1 và g_2 của G_1 mà

$a\, g_1 = b\, g_2$, $g_1 g_2$in: 2 args.G_1

Nhân cả hai vế của hệ thức này với g_1^{-1} từ bên phải, ta có

$a = bg_2 g_1^{-1}$

Mọi yếu tố của lớp lân cận trái $a\ G_1$ có dạng

$a\ g_k = b\ g_2\ g_1^{-1} g_k,\ g_k G_1$.

Vì

$g_2 g_1^{-1} g_k \quad G_1$

cho nên $b\ g_2 g_1^{-1} g_k$ là một yếu tố của lớp lân cận $b\ G_1$. Vậy mọi yếu tố của $a\ G_1$ đều thuộc vào $b\ G_1$, nghĩa là

$a\ G_1 \quad b\ G_1$

Tương tự như vậy

$b\ G_1 \quad a\ G_1$

Hai hệ thức này chứng tỏ rằng hai lớp lân cận $a\ G_1$ và $b\ G_1$ phải trùng nhau

$a\ G_1 = b\ G_1$

Ngược lại, nếu chúng không trùng nhau thì chúng không thể có yếu tố chung nào.

Xét một nhóm hữu hạn G và cấp n và giả sử nó có một nhóm con G_1 cấp n_1. Từ Mệnh đề vừa chứng minh suy ra rằng nhóm G được tách ra thành các lớp lân cận không giao nhau của nhóm con G_1, mỗi lớp đều có cùng một số yếu tố bằng số yếu tố n_1 của nhóm con G_1. Nếu có r lớp lân cận thì số yếu tố của nhóm G là

$n = r\ n_1$

Vậy ta có mệnh đề sau,

Mệnh đề (Định lý Lagrange)

Cấp của nhóm con G 1 của nhóm hữu hạn G là ước số của cấp của nhóm G

Định nghĩa nhóm con bất biến

Nhóm con H của nhóm G được gọi là nhóm con bất biến nếu với mọi yếu tố a của nhóm G lớp lân cận trái aH trùng với lớp lân cận phải $H\,a$:

a H = H a.

Ta còn viết

$a\,H\,a^{-1} = H$

Hệ thức này chứng tỏ rằng với mọi yếu tố b của nhóm con H,

$b$in: 2 args.H,

ta luôn luôn có

$a\,b\,a^{-1}$ in: 2 args. H

với bất kỳ một yếu tố a nào của nhóm G,

$\forall$ $a$in: 2 args.G.

Vậy theo định nghĩa, nếu nhóm con bất biến H chứa một yếu tố b nào đó thì nó cũng chứa tất cả các yếu tố liên hợp với b. Nói khác đi, một nhóm con bất biến bao giờ cũng chứa gọn toàn bộ từng lớp các yếu tố liên hợp.

Cho một nhóm G và một nhóm con bất biến H của nó. Mỗi yếu tố a không thuộc vào H hoàn toàn xác định lớp lân cận $a\,H$ và có thể xem là yếu tố đại diện của lớp này. Cho hai lớp $a\,H$ và $b\,H$ đại diện bởi hai yếu tố a và b và xét tập hợp các yếu tố là tích của một yếu tố của lớp $a\,H$ và một yếu tố của $b\,H$. Tập hợp này được ký hiệu là $a\,H\,b\,H$. Vì H là nhóm con bất biến cho nên

$H\,b = b\,H,\ a\,H\,b\,H = a\,b\,H\,H$

và do đó

$a\,H\,b\,H\ \ a\,b\,H.$

Vậy tất cả các tích đang xét đều là các yếu tố cả lớp a b H mà đại diện là yếu tố a b.

Định nghĩa nhóm thương

Cho nhóm G và nhóm con bất biến H của nó. Trên tập hợp các lớp lân cận của nhóm H ta định nghĩa phép nhân như sau: tích của hai lớp lân cận $a\,H$ và $b\,H$ là lớp lân cận $a\,b\,H$. Yếu tố đơn vị của phép nhân này là chính nhóm con H. Yếu tố nghịch đảo của lớp lân cận $a\,H$ là lớp lân cận $a^{-1}H$. Với phép nhân, yếu tố đơn vị và yếu tố nghịch đảo định nghĩa như vậy, tập hợp các lớp lân cận của nhóm con H tạo thành một nhóm gọi là nhóm thương G/H của nhóm G đối với nhóm con bất biến H. Tính chất kết hợp của phép nhân trên G/H suy ra từ tính chất kết hợp của phép nhân trên G.