Họ các nhóm điểm O , Oh

Bởi:

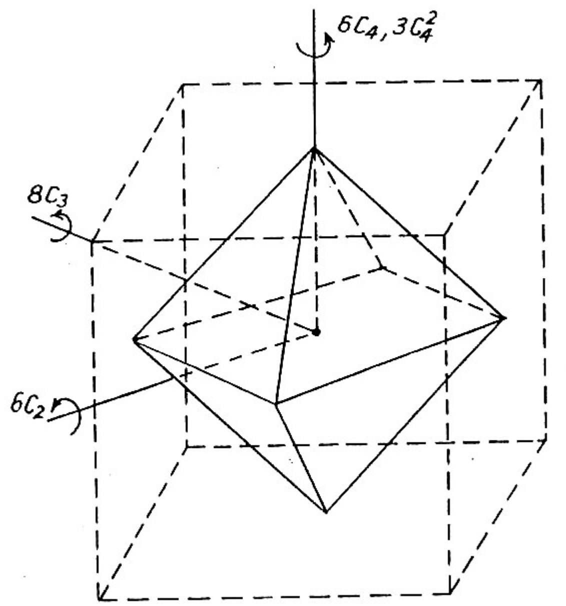
Nguyễn Văn Hiệu

1) Nhóm *O* gồm tất cả các phép quay làm các đỉnh của một hình lập phương đổi chỗ cho nhau nhưng không làm thay đổi vị trí của hình lập phương đó (hình 3.19). Các phép quay đó là:

- Các phép quay C_4, $C_4^2 = C_2$, $C_4^3 = C_4^{-1}$ quanh ba trục quay C_4 mà mỗi trục quay này đi qua tâm của hai hình vuông là hai mặt bên song song của hình lập phương.
- Các phép quay C_3, $C_3^2 = C_3^{-1}$quanh bốn trục quay C_3 mà mỗi trục quay đi qua hai đỉnh của hnfh lập phương đối xứng đối với nhau qua tâm nghịc đảo là tâm của hình lập phương.
- Các phép quay C_2 quanh sáu trục quay C_2 mà mỗi trục quay đi qua trung điểm của hai cạnh bên song song của hình lập phương đối xứng đối với nhau qua tâm nghịch đảo là tâm của hình lập phương.

Vậy nhóm *O* có 24 yếu tố sau đây: E, $3C_4$, $3C_4^2$, $3C_4^3$, $4C_3$, $4C_3^2$, $6C_2$. Các yếu tố đối xứng nhau là: ba trục quay C_4, bốn trục quay C_3 và sáu trục quay C_2.

Ta hãy vẽ một hình bát diện đều có sáu đỉnh nằm tại sáu tâm điểm của sáu hình vuông là sáu mặt bên của hình lập phương (hình 3.19). Các phép quay thuộc nhóm *O* vừa nói ở trên cũng là các phép đối xứng của hình bát diện đều (octahedron). Vì vậy ta ký hiệu nhóm đó là nhóm *O*.



Hình 3.19

Bây giờ ta xét xem nhóm *O* tách ra thành các lớp các yếu tố liên hợp nào. Ta có thể làm việc này mà không cần viết tường minh bảng nhân nhóm, chỉ cần nhắc lại rằng hai phép quay cùng một góc quanh hai trục quay tương đương là hai yếu tố liên hợp với nhau. Áp dụng cho các phép quay quanh các trục C_4, ta thấy rằng có hai lớp các yếu tố liên hợp $3C_4 + 3C_4^{-1}$ và $3C_2$; áp dụng cho các trục quay C_3 ta thấy rằng có một lớp $6C_2$; chính yếu tố đơn vị *E* là một lớp. Vậy nhóm *O* tách thành năm lớp các yếu tố liên hợp sau đây:

$C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{6C_2\}$,$C_3 = \{4C_3 4C_3^{-1}\}$,

$C_4 = \{3C_4 3C_4^{-1}\}$, $C_5 = \{3C_4^2\}$.

Để diễn đạt một cách tường minh các yếu tố của nhóm *O* dưới dạng một bảng thường dùng cách sau đây. Ta chọn gốc tọa độ Descartes tại điểm cố định của nhóm điểm *O* và lấy một điểm *M* với các tọa độ Descartes *x*, *y*, *z*. Trong phép biến đổi *g* của nhóm *O* điểm này chuyển thành một điểm *M*' có các tọa độ Descartes *x*', *y*', z' biểu diễn qua các tọa độ *x*, *y*, *z* của điểm *M*. Ta lập một bảng gồm hai cột, cột thứ nhất ghi tên các phép biến đổi g của nhóm *O*, cột thứ hai ghi các biểu thức của *x*', *y*', z' qua *x*, *y*, *z*. Các phép quay trong nhóm *O* được ký hiệu như sau.

- Có ba phép quay C_4 quanh ba trục *Ox*, *Oy*, *Oz* được ký hiệu là C_4^x, C_4^y, C_4^z. Các trục quay tương ứng được xác định bởi các phương trình sau đây:

$C_4^x : y = z = 0,$

$C_4^y : z = x = 0,$

$C_4^z : x = y = 0.$

- Có sáu trục quay C_2, mỗi trục quay là một đường thẳng được xác định bởi một hệ hai phương trình bậc nhất và được ký hiệu như sau:

$C_2^{yz} : x = 0, y = z$, $C_2^{\overline{yz}} : x = 0, y = - z,$

$C_2^{zx} : y = 0$, $z = x$, $C_2^{\overline{zx}} : y = 0, z = - x$

$C_2^{xy} : z = 0, x = y C_2^{\overline{xy}} : z = 0, x = - y$

- Có bốn trục quay C_3, mỗi trục quay là một đường thẳng xác định bởi một hệ hai phương trình bậc nhất và được ký hiệu như sau:

$C_3^{xyz} : x = y = z$, $C_3^{x\overline{y}z} : x = - y = z,$

$C_3^{\overline{x}yz} : - x = y = z$, $C_3^{xy\overline{z}} : x = y = - z.$

Ta có bảng sau đây:

Nhóm *O*

Họ các nhóm điểm O , Oh

Yếu tố	Tọa độ x', y', z'
E	x, y, z
C_4^x	$x, -z, y$
C_4^y	$z, y, -x$
C_4^z	$-y, x, z$
C_2^x	$x, -y, -z$
C_2^y	$-x, y, -z$
C_2^z	$-x, -y, z$
$(C_4^x)^{-1}$	$x, z, -y$
$(C_4^y)^{-1}$	$-z, y, x$
$(C_4^z)^{-1}$	$y, -x, z$
C_2^{yz}	$-x, z, y$
$C_2^{y\bar{z}}$	$-x, -z, -y$

Yếu tố	Tọa độ x', y', z'
C_2^{zx}	$z, -y, x$
$C_2^{z\bar{x}}$	$-z, -y, -x$
C_2^{xy}	$y, x, -z$
$C_2^{x\bar{y}}$	$-y, -x, -z$
C_3^{xyz}	z, x, y
$C_3^{x\bar{y}z}$	$-y, -z, x$
$C_3^{\bar{x}yz}$	$-y, z, -x$
$C_3^{\bar{x}\bar{y}z}$	$y, -z, -x$
$(C_3^{xyz})^2$	Y, z, x
$(C_3^{x\bar{y}z})^2$	$z, -x, -y$
$(C_3^{\bar{x}yz})^2$	$-z, -x, y$
$(C_3^{\bar{x}\bar{y}z})^2$	$-z, x, y$

Ta cũng có thể viết các tọa độ x, y, z của một điểm M dưới dạng ma trận một cột

(x, y, z)

và diễn tả tác dụng của phép biến đổi điểm g chuyển điểm này thành điểm M’ có tọa độ x', y', z' dưới dạng tác dụng của một ma trận vuông 3 x 3 cũng ký hiệu là g lên cột đã cho:

$(x', y', z') = g\,(x, y, z)$

Nhìn bảng các yếu tố của nhóm *O* ta có thể viết ngay dạng tường minh của 24 ma trận như sau:

$$C_4^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2^y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2^z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C_4^x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_4^y)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_4^z)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2^{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2^{y\bar{z}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2^{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2^{z\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2^{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2^{x\bar{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_3^{xyz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_3^{x\bar{y}z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_3^{\bar{x}yz} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3^{\bar{x}\bar{y}z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_3^{xyz})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_3^{x\bar{y}z})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C_3^{\bar{x}yz})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_3^{\bar{x}\bar{y}z})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nhóm T là một nhóm con của nhóm O. Nó có 12 yếu tố:

$E, C_2^x, C_2^y, C_2^z, C_3^{xyz}, C_3^{\bar{x}yz}, C_3^{x\bar{y}z}, C_3^{xy\bar{z}}, (C_3^{xyz})^2, (C_3^{\bar{x}yz})^2, (C_3^{x\bar{y}z})^2, (C_3^{\overline{xy}z})^2.$

Ngoài 12 yếu tố này nhóm T_d còn chứa 12 yếu tố sau đây:

$$i\,C_4^x,\ i\,C_4^y,\ i\,C_4^z,\ i\,(C_4^x)^{-1},\ i\,(C_4^y)^{-1},\ i\,(C_4^z)^{-1},\ i\,C_2^{xy},\ i\,C_2^{x\bar{y}},\ i\,C_2^{yz},\ iC_2^{y\bar{z}},\ i\,C_2^{zx},\ i\,C_2^{z\bar{x}}.$$

Tích của hai yếu tố loại này bằng một yếu tố của nhóm *T*. Nếu tat hay thế tất cả các yếu tố loại thứ hai này bằng phép quay tương ứng.

$$i\,g \rightarrow g$$

thì nhóm *Td* trở thành nhóm *O*. Vì phép thay thế này phù hợp với phép nhân nhóm nên ta kết luật rằng nhóm T_d đẳng cấu với nhóm *O*.

2) Nhóm *Oh* gồm tất cả các phép đối xứng của hình lập phương, trong đó có 24 phép quay là các yếu tố của nhóm con *O*, ngoài ra còn có 24 tổ hợp của mỗi phép quay đó với phép nghịch đảo i đối với tâm nghịch đảo là tâm của hình lập phương. Vậy nhóm *Oh* có 48 yếu tố và có thể được xem như là tích trực tiếp của nhóm con *O* và nhóm con *Ci*:

$$Oh = O \otimes Ci.$$

Các yếu tố của nhóm *Oh* cũng là cá phép đối xứng của hình bát diện đều vẽ lồng trong hình lập phương (hình 3.19). Do đó nhóm *Oh* còn được gọi là **nhóm bát diện (octahedral)**. Vì nhóm con *O* có năm lớp các yếu tố liên hợp, nhóm *Ci* có hai yếu tố nên *Oh* tách ra thành mười lớp các yếu tố liên hợp: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 như nhóm O và $C_6 = iC_1$, $C_7 = iC_2$, $C_8 = iC_3$, $C_9 = iC_4$, $C_{10} = iC_5$.