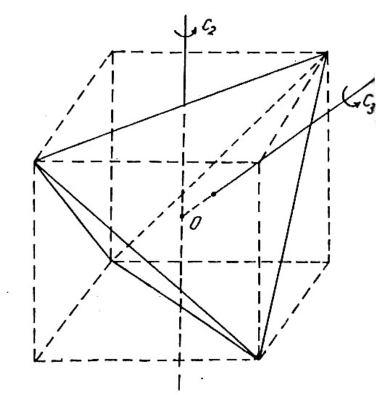
Họ các nhóm điểm T, Th, Td

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Họ này có ba nhóm, trong đó T và T_d là các nhóm đối xứng của hình tứ diện đều, còn T_h có một số yếu tố là các phép đối xứng của hình tứ diện đều.

1) Nhóm các phép quay không làm thay đổi vị trí củ một hình tứ diện đều, mà chỉ làm cho các đỉnh của nó đổi chỗ cho nhau, gọi là nhóm T. Để thấy được rõ hơn các phép quay nào là phép quay đối xứng của hình tứ diện đều ta vẽ hình này lồng vào trong một hình lập phương (hình 3.18a).



Hình 3.18a

Trong các phép quay C_2 quanh ba trục quay mà mỗi trục đi qua tâm điểm O của hình lập phương và qua hai tâm điểm của hai hình vuông là hai mặt bên song song với nhau của hình lập phương thì tứ diện đều không thay đổi vị trí. Hình tứ diện đều cũng đối xứng với các phép quay C_3 và C_3^2quanh bốn trục quay đi qua tâm điểm O của hình lập phương và bốn cặp đỉnh xuyên tâm đối của nó. Các trục quay này đi qua tâm điểm của các hình tam giác đều là các mặt bên của hình tứ diện đều. Vậy nhóm T có 12 yếu tố sau đây: E, $3C_2$, $4C_3$, 4 C_3^2. Các yếu tố đối xứng là: ba trục quay C_2 và bốn trục quay C_3. Để lập bảng nhân nhóm ta hãy viết ra các ma trận của các phép quay thuộc nhóm T. Từ tâm điểm O của hình lập phương ta hãy kẻ ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz trực giao với ba mặt bên kề nhau của hình lập phương và vẽ ba vectơ đơn vị ex, ey, ez dọc theo ba trục tọa độ này. Các trục tọa độ đồng thời là ba trục quay C_2 của nhóm T. Ta ký hiệu các phép quay tương ứng là $C_2(e_x)$ $C_2(e_y)$ $C_2(e_z)$. Các phép quay này biến đổi các vectơ đơn vị như sau:

$C_2(e_x) : e_x \rightarrow e_x , e_y \rightarrow e_y , e_z \rightarrow e_z ;$

$C_2(e_y) : e_x \rightarrow - e_x , e_y \rightarrow e_y , e_z \rightarrow - e_z ;$

$C_2(e_z) : e_x \rightarrow - e_x , e_y \rightarrow - e_y , e_z \rightarrow e_z .$

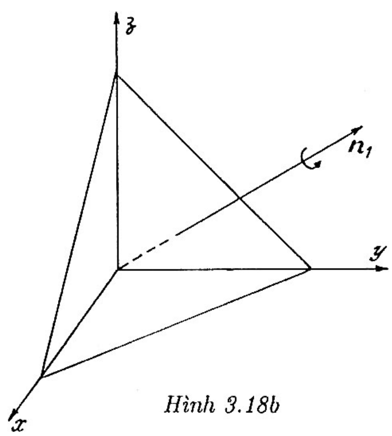
Do đó các phép quay này có các ma trận sau đây:

$$C_2(e_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C_2(e_y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C_2(e_z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Ta chọn vectơ

$n_1 = x + y + z$

làm một trục quay C_3 (hình 3.18b) và ký hiệu các phép quay của nhóm C_3 quanh trục này là $C_3(n_1)$ và $C_3(n_1)^2 = C_3(n_1)^{-1}$. Sau mỗi phép quay $C_2(e_x)$ $C_2(e_y)$ $C_2(e_z)$ vectơ n_1 chuyển thành các vectơ sau đây:



Hình 3.18b

$C_2(e_x) : n_1 \rightarrow n_2 = e_x + (- e_y) + (-e_z);$

$C_2(ey) : n_1 \rightarrow n_3 = (-e_x) + e_y + (-e_z);$

$C_2(ez) : n_1 \rightarrow n_4 = (-e_x) + (- e_y) + e_z .$

Bốn vectơ n_1, n_2, n_3, n_4 là bốn trục quay C_3 của nhóm T. Trong các phép quay C_3 quanh bốn trục này các vectơ đơn vị biến đổi như sau:

$C_3(n_1) : e_x \rightarrow e_y, e_y \rightarrow e_z , e_z \rightarrow e_x ,$

$C_3\,(n_2): e_x \rightarrow -e_y,\ e_y \rightarrow e_z,\ e_z \rightarrow -e_x,$

$C_3\,(n_3): e_x \rightarrow -e_y,\ e_y \rightarrow -e_z,\ e_z \rightarrow e_x,$

$C_3\,(n_4): e_x \rightarrow e_y,\ e_y \rightarrow -ez,\ e_z \rightarrow -e_x.$

Vậy các phép quay C_3 của nhóm T có các ma trận

$$C_3(n_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3(n_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_3(n_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3(n_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Lấy bình phương các ma trận (28), ta thu được ma trận của các phép quay $C_3^2 = C_3^{-1}$cụ thể là

$$C_3(n_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3(n_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_3(n_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3(n_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Bằng cách nhân các ma trận xác định bởi các công thức (27), (28), (29) từng đôi một, ta suy ra các quy tắc nhân nhóm. Thí dụ

$$C_2(e_x)\ C_2(e_y) = C_2(e_y)\ C_2(e_x) = C_2(e_z)\,,$$
$$C_2(e_x)\ C_2(e_z) = C_2(e_z)\ C_2(e_x) = C_2(e_y)\,, \qquad (30a)$$
$$C_2(e_y)\ C_2(e_z) = C_2(e_z)\ C_2(e_y) = C_2(e_x)\,;$$

$$C_2(e_x)\ C_3(n_1) = C_3(n_3),\ C_3(n_1)^{-1}\ C_2(e_x) = C_3(n_3)^{-1},$$
$$C_2(e_x)\ C_3(n_2) = C_3(n_4),\ C_3(n_2)^{-1}\ C_2(e_x) = C_3(n_4)^{-1},$$
$$C_2(e_x)\ C_3(n_3) = C_3(n_1),\ C_3(n_3)^{-1}\ C_2(e_x) = C_3(n_1)^{-1},\qquad (30b)$$
$$C_2(e_x)\ C_3(n_4) = C_3(n_2),\ C_3(n_4)^{-1}\ C_2(e_x) = C_3(n_2)^{-1};$$

$$C_3(n_1)\ C_2(e_x) = C_3(n_4),\ C_2(e_x)\ C_3(n_1)^{-1} = C_3(n_4)^{-1},$$
$$C_3(n_2)\ C_2(e_x) = C_3(n_3),\ C_2(e_x)\ C_3(n_2)^{-1} = C_3(n_3)^{-1},$$
$$C_3(n_3)\ C_2(e_x) = C_3(n_2),\ C_2(e_x)\ C_3(n_3)^{-1} = C_3(n_2)^{-1},\qquad (30c)$$
$$C_3(n_4)\ C_2(e_x) = C_3(n_1),\ C_2(e_x)\ C_3(n_4)^{-1} = C_3(n_1)^{-1};$$

$$C_3(n_1)\ C_3(n_2) = C_3(n_4)^{-1},\ C_3(n_2)^{-1}\ C_3(n_1)^{-1} = C_3(n_4),$$
$$C_3(n_1)\ C_3(n_3) = C_3(n_2)^{-1},\ C_3(n_3)^{-1}\ C_3(n_1)^{-1} = C_3(n_2),$$
$$C_3(n_1)\ C_3(n_4) = C_3(n_3)^{-1},\ C_3(n_4)^{-1}\ C_3(n_1)^{-1} = C_3(n_3),$$
$$(30d)$$
$$C_3(n_1)\ C_3(n_2)^{-1} = C_2(e_x)\ ,\ C_3(n_2)\ C_3(n_1)^{-1} = C_2(e_z)\ ,$$
$$C_3(n_1)\ C_3(n_3)^{-1} = C_2(e_x)\ ,\ C_3(n_3)\ C_3(n_1)^{-1} = C_2(e_x)\ ,$$
$$C_3(n_1)\ C_3(n_4)^{-1} = C_2(e_y)\ ,\ C_3(n_4)\ C_3(n_1)^{-1} = C_2(e_y)\ ;$$

Cuối cùng ta hãy xét xem nhóm T gồm bao nhiêu lớp các yếu tố liên hợp, và đó là những lớp nào. Yếu tố đơn vị E là một lớp. Để tìm lớp các yếu tố liên hợp với yếu tố $C_2(e_x)$ ta hãy dùng các biểu thức (27), (28), (29) của các yếu tố của nhóm T và tính tất cả các tích có dạng $g^{-1}C_2(e_x)$ với mọi yếu tố g của nhóm này. Thí dụ như nếu ta lấy g là $C_3(n_1)$, $C_3(n_2)$, $C_3(n_3)$, $C_3(n_4)$ thì ta có

$$C_3(n_1)^{-1}\ C_2(e_x)\ C_3(n_1) = C_2(e_z)\ ,$$
$$C_3(n_2)^{-1}\ C_2(e_x)\ C_3(n_2) = C_2(e_z)\ ,$$
$$C_3(n_3)^{-1}\ C_2(e_x)\ C_3(n_3) = C_2(e_z)\ ,\qquad (31a)$$
$$C_3(n_4)^{-1}\ C_2(e_x)\ C_3(n_4) = C_2(e_z)\ ,$$

còn nếu lấy g là $C_3(n_1)^{-1}$, $C_3(n_2)^{-1}$, $C_3(n_3)^{-1}$, $C_3(n_4)^{-1}$ thì ta thu được

$$C_3(n_1)\,C_2(e_x)\,C_3(n_1)^{-1} = C_2(e_y)\,,$$
$$C_3(n_2)\,C_2(e_x)\,C_3(n_2)^{-1} = C_2(e_y)\,,$$
$$C_3(n_3)\,C_2(e_x)\,C_3(n_3)^{-1} = C_2(e_y)\,, \qquad (31b)$$
$$C_3(n_4)\,C_2(e_x)\,C_3(n_4)^{-1} = C_2(e_y)\,.$$

Ngoài ra từ các hệ thức (30a) ta có ngay

$$C_2(e_y)\,C_2(e_x)\,C_2(e_y) = C_2(e_x)\,,$$
$$C_2(e_z)\,C_2(e_x)\,C_2(e_z) = C_2(e_x)\,. \qquad (31c)$$

Các biểu thức (31a) – (31c) của các yếu tố $g^{-1}C_2(e_x)g$ cũng như các biểu thức của các yếu tố $g^{-1}C_2(e_y)g$ và $g^{-1}C_2(e_z)$ g mà ta có thể xác lập một cách tương tự chứng tỏ rằng ba phép quay C_2 là $C_2(e_x)$, $C_2(e_y)$, $C_2(e_z)$ tạo thành một lớp các yếu tố liên hợp. Để tìm lớp các yếu tố liên hợp với $C_3(n_1)$ ta hãy tính tất cả các tích có dạng $g^{-1}C_3(n_1)g$ với mọi yếu tố g của nhóm T. Ta có

$$C_3(n_2)^{-1}\,C_3(n_1)\,C_3(n_2) = C_3(n_3),$$
$$C_3(n_3)^{-1}\,C_3(n_1)\,C_3(n_3) = C_3(n_4), \qquad (32a)$$
$$C_3(n_4)^{-1}\,C_3(n_1)\,C_3(n_4) = C_3(n_2).$$

$$C_3(n_2)\,C_3(n_1)\,C_3(n_2)^{-1} = C_3(n_4),$$
$$C_3(n_3)\,C_3(n_1)\,C_3(n_3)^{-1} = C_3(n_2), \qquad (32b)$$
$$C_3(n_4)\,C_3(n_1)\,C_3(n_4)^{-1} = C_3(n_3).$$

$$C_2(e_x)\,C_3(n_1)\,C_2(e_x) = C_3(n_2),$$
$$C_2(e_y)\,C_3(n_1)\,C_2(e_y) = C_3(n_3), \qquad (32c)$$
$$C_2(e_z)\,C_3(n_1)\,C_2(e_z) = C_3(n_4).$$

Các hệ thức trên chứng tỏ rằng bốn phép quay C_3 là $C_3(n_1)$, $C_3(n_2)$, $C_3(n_3)$, $C_3(n_4)$ liên hợp với nhau và tạo thành một lớp các yếu tố liên hợp. Lấy nghịch đảo cả hai vế của mỗi hệ thức trong số tất cả các hệ thức (32a), (32b), (32c) ta thu được các hệ thức chứng tỏ rằng bốn phép quay $C_3^2 = C_3^{-1}$ là $C_3(n_1)^{-1}$, $C_3(n_2)^{-1}$, $C_3(n_3)^{-1}$, $C_3(n_4)^{-1}$ liên hợp với nhau và tạo thành một lớp các yếu tố liên hợp. Vậy nhóm *T* chia thành bốn lớp các yếu tố liên hợp;

$C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{C_2(e_x)C_2(e_y)C_2(e_z)\}$,

$C_3 = \{C_3(n_1), C_3(n_2), C_3(n_3), C_3(n_4)\}$,

$C\ 4 = \{C_3(n_1)^2, C_3(n_2)^2, C_3(n_3)^2, C_3(n_4)^2\}$,

Ta cũng có thể thu được kết quả này một cách nhanh chóng mà không cần phải sử dụng hang loạt công thức (30a)-(32c), nếu ta áp dụng mệnh đề sau đây: nếu trong một nhóm G có hai phép quay $C_k(\varphi)$, $C_l(\varphi)$cùng một góc φquanh hai trục *k*, *l* và một phép quay *R* chuyển trục nọ thành trục kia,

$k = Rl$, *R*in: 2 args.*G*,

$C_k(\varphi)$in: 2 args.*G*, $C_l(\varphi)$in: 2 args.*G*,

thì hai phép quay $C_k(\varphi)$ và $C_l(\varphi)$ liên hợp với nhau. Ta có thể chứng minh mệnh đề này giống như đã chứng minh một mệnh đề tương tự đối với nhóm quay *SO*(3) trong Chương I. Hai trục quay *k* và *l* trong mệnh đề nói trên là hai trục quay tương đương. Trong trường hợp nhóm *T* ba trục quay e_x , e_y , e_z của các phép quay C_2 tương đương với nhau, bốn trục quay n_1, n_2, n_3, n_4 của các phép quay C_3 và C_3^2cũng tương đương với nhau, lớp C_2 gồm ba phép quay cùng một góc π quanh ba trục tương đương, lớp C_3 gồm ba phép quay góc $\frac{2\pi}{3}$quanh bốn trục tương đương và C_4 gồm bốn phép quay góc $\frac{4\pi}{3}$quanh bốn trục tương đương.

2) Nhóm T_h là tích trực tiếp của nhóm *T* và nhóm C_i:

$T_h = T \otimes C_i$

Nhóm này gồm 24 yếu tố: 12 phép quay không thay đổi vị trí của một hình tứ diện đều và 12 phép quay – nghịch đảo mà mỗi phép quay – nghịch đảo là tổ hợp của một phép quay nói trên và phép nghịch đảo i đối với tâm điểm của hình tứ diện. Các yếu tố đối xứng là: ba trục quay C_2, bốn trục quay C_3 và tâm nghịch đảo *i*. Nhóm T_h gồm tám lớp các yếu tố liên hợp:

$C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{3C_2\}$,$C_3 = \{4C_3\}$, $C_4 = \{4C_3^2\}$,

$C_5 = \{i\}$, $C_6 = \{3iC_2\}$, $C_7 = \{4iC_3\}$, $C_8 = \{4iC_3^2\}$.

Vì phép nghịch đảo *i* không phải là phép đối xứng của hình tứ diện, mà lại chuyển hình này sang một vị trí khác, như chúng ta có thể thấy một cách dễ dàng trên hình 3.18a, cho nên T_h không phải là nhóm đối xứng của hình tứ diện.

3) Nhóm T_d gồm tất cả các phép đối xứng của hình tứ diện và được gọi là **nhóm tứ diện (tetrahedral)**. Các yếu tố của nhóm *T* đều là các yếu tố của nhóm T_d, do đó *T* là nhóm con của nhóm T_d. Nhìn hình vẽ 3.18a ta thấy ngay rằng nếu ta lấy ba trục C_4 trùng với ba trục C_2 của nhóm *T*, thực hiện phép quay C_4 hoặc $C_4^3 = C_4^{-1}$quanh các trục này rồi thực hiện tiếp luôn phép nghịch đảo i, thì sau cả hai phép biến đổi liên tiếp đó hình tứ diện đều trở về vị trí cũ. Vậy mỗi tổ hợp của phép quay C_4 hoặc C_4^{-1} với phép nghịch đảo i là một phép đối xứng của hình tứ diện đều và do đó là một yếu tố của nhóm T_d. Ta hãy tưởng tượng là có một mặt phẳng $\sigma_d$chứa hai đường chéo song song với nhau của hai hình vuông là hai mặt bên song song với nhau của hình lập phương. Nhìn hình vẽ 3.18a ta thấy ngay rằng mặt phẳng σ_d này chứa một cạnh của hình tứ diện đi qua trung điểm của một cạnh khác không có đỉnh chung với nó và chia hình tứ diện thành hai phần đối xứng với nhau. Có tất cả sáu mặt phẳng gương loại này. Sáu phép phản xạ gương σ_d qua sáu mặt phẳng gương đó cũng là sáu yếu tố của nhóm T_d. Vậy nhóm T_d có 24 yếu tố E, $3C_2$, $4C_3$, $4C_3^{-1}$, $3iC_4$, $3iC_4^3$, $6\sigma_d$. Chú ý rằng giữa các phép quay C_n, C_n^{-1} quanh một mặt phẳng chứa trục quay ta có hệ thức

$$\sigma C_n \sigma = C_n^{-1} \qquad (33)$$

Vì trong nhóm T_d có các phép phản xạ gương chứa trục quay cho nên các phép quay C_3 và C_3^{-1}liên hợp nhau, các phép quay – nghịch đảo iC_4 và iC_4^3liên hợp với nhau. Do đó nhóm T_d gồm năm lớp các yếu tố liên hợp:

$$C_1 = \{E\}\,,\ C_2 = \{3C_2\}\,, C_3 = \{8C_3\} = \{4C_3 4C_3^{-1}\}\,,$$

$$C_4 = \{6iC_4\} = \{3iC_4, 3iC_4^3\}\,,\ C_5 = \{6\sigma_d\}\,.$$

Các yếu tố đối xứng là: ba trục quay C_2, ba trục quay – nghịch đảo iC_4, bốn trục quay C_3 và sáu mặt phẳng gương σ_d.