Nhóm Lie và đại số Lie

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Khi nghiên cứu về các nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$ chúng ta đã thiết lập các hệ thức giao hoán giữa các vi tử của mỗi nhóm này và thấy rằng các vi tử đó tạo thành đại số Lie. Bây giờ chúng ta mở rộng các lý luận đã trình bày khi nghiên cứu về các nhóm $SO(3)$ và $SU(2)$ ra cho trường hợp một nhóm Lie G gồm các phép biến đổi tuyến tính thỏa mãn những điều kiện nhấy định của một không gian vectơ nào đó và chứng minh rằng các vị tử của nhóm này tạo thành một đại số Lie. Trước hết ta hãy giới thiệu những khái niệm cơ bản về đại số Lie.

Đại số Lie

Cho một không gian vectơ V trên đường R các số thức hoặc trường C các số phức. Ký hiệu các yếu tố của V là X, Y, Z… các yếu tố của trường R hoặc C là α,β,γ… Giả sử rằng trên tập hợp V có một quy tắc gọi là phép nhân cho phép ta từ hai yếu tố X, Y bất kỳ của V xác định được một và chỉ một yếu tố thứ ba của V ký hiệu là $X \cdot Y$ và gọi là tích của X và Y, mà

$X \cdot (\alpha Y) = (\alpha X) \cdot Y = \alpha \cdot (XY)$,

$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,

$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X + Z$. (38)

Không gian vectơ V với phép nhân hai yếu tố được định nghĩa như thế được gọi là một đại số A. Nếu phép nhân các yếu tố của một đại số có tính chất kết hợp

$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

thì đại số A được gọi là đại số kết hợp.

Một đại số A với phép nhân hai yếu tố

$\{X,Y\} \;\rightarrow\; (X \wedge Y)$

thỏa mã các điều kiện

$(XY) = -(YX)$ (phản giao hoán) (39)

$\big(X \wedge (Y \wedge Z)\big) + \big(Y \wedge (Z \wedge X)\big) + \big(Z \wedge (X \wedge Y)\big) = 0$ (40)

(đồng nhất thức Jacobi)

được gọi là một đại số Lie. Cho một đại số kết hợp A với tích của hai yếu tố X và Y được ký hiệu là $X \cdot Y$. Trên tập hợp A ta hãy đưa ra một định nghĩa khác của phép nhân hai yếu tố

$\{X,Y\} \rightarrow (X \wedge Y) \equiv [X,Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ (41)

Với định nghĩa mới này của tích hai yếu tố đại số A trở thành một đại số Lie L. Thực vậy, dễ dàng thử lại rằng định nghĩa (41) của tích hai yếu tố thỏa mãn các điều kiện (39) và (40).

Xem như một không gian vectơ mỗi đại số Lie có một hệ các vectơ cơ sở Xi, $i = 1, 2, \ldots, s$, mà mọi yếu tố X của L đều có thể viết một cách đơn giá dưới dạng

$X = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X_i$ (42)

với các hệ số α_i trong trường số đã cho. Xét hai yếu tố Xi và Xj tùy ý của hệ cơ sở của một đại số Lie L và tích $(X_i \wedge X_j)$ của chúng. Vì $(X_i \wedge X_j)$ cũng là một yếu tố của đại số L cho nên nó cũng lại phải là một tổ hợp tuyến tính của các yếu tố của hệ cơ sơ, nghĩa là phải có dạng

$(X_i X_j) = \sum_{i=1}^{s} \gamma_{ijk} X_k$. (43)

Các hệ số γ_{ijk} được gọi là các hằng số cấu trúc của đại số Lie L. Từ các điều kiện (39) và (40) suy ra rằng các hằng số cấu trúc γ_{ijk} thỏa mãn các hệ thức sau đây:

$\gamma_{jik} = -\gamma_{ijk}$ (44)

$\gamma_{i_{lm}}\gamma_{i_{kl}} + \gamma_{jlm}\gamma_{kil} + \gamma_{klm}\gamma_{ijl} = 0$ (45)

Cho hai đại số Lie L và L’ với các yếu tố ký hiệu là X, Y, Z v.v. và X’, Y’, Z’ v.v.. Ta nói rằng đại số Lie L đồng cấu với đại số Lie L’ nếu có phép ánh xạ tuyến tính không gian vectơ L lên không gian vectơ L’,

$L \rightarrow L$’,

có tính chất bảo toàn phép nhân của đại số Lie, nghĩa là từ

$X \to X'$, $Y \to Y'$

suy ra

$(X \wedge Y) \to (X' \wedge Y')$

Nếu phép ánh xạ tuyến tính của đại số Lie L lên đại số Lie L' là đơn giá theo cả hai chiều

$L \leftrightarrow L'$

và bảo toàn phép nhân của đại số Lie, thì ta nói rằng hai đại số lie *L* và *L*' đẳng cấp với nhau. Sau này chúng ta sẽ không phân biệt các đại số Lie đẳng cấu.

Liên hệ giữa nhóm Lie các phép biến đổi và đại số Lie

Sau khi đã biết một số khái niệm cơ bản về đại số Lie bây giờ chúng ta thiết lập mối liên hệ giữa mỗi nhóm Lie các phép biến đổi tuyến tính của một không gian vectơ và đại số Lie tương ứng. Trong không gian vectơ đó ta hãy chọn một hệ cơ sở và biểu diễn mỗi phép biến đổi *T* bằng một ma trận cũng ký hiệu là *T* và đặt

$T = e^{-iX}$. (46)

Từ định nghĩa nhóm *G* suy ra những điều kiện mà ma trận *T* phải thỏa mãn, rồi từ những điều kiện này suy ra những điều kiện mà ma trận *X* phải thỏa mãn. Thí dụ như nếu *G* là nhóm các biến đổi trực giao trong không gian Euclide thì các yếu tố của nó phải là những ma trận trực giao *O* thỏa mãn điều kiện

$O^T = O^{-1}$

và do đó các ma trận X trong hệ thức

$O = e^{-iX}$

phải là các ma trận phản giao hoán

$X^T = -X.$

Tương tự như vậy, nếu *G* là nhóm các biến đổi unita trong một không gian phức thì các yếu tố của nó phải là những mà trận unita *U* thỏa mãn điều kiện

$U^+ = U^-$

và do đó các ma trận X trong biểu thức

$U = e^{-iX}$

phải là các ma trận tự liên hợp

$X^{+} = X$

Ngoài ra, nếu các ma trận O hoặc U có định thức bằng 1, nghĩa là nếu

$\det O = 1$

hoặc

$\det U = 1$

thì các ma trận X phải có vết bằng không,

$\mathrm{Tr}\, X = 0$

Trong không gian vectơ các ma trận X thỏa mãn các điều kiện suy ra từ định nghĩa của nhóm G đã cho ta hãy chọn một hệ cơ sở gồm các ma trận độc lập tuyến tính Xi, $i = 1, 2, \ldots, s$, mà mọi ma trận X đang xét đều có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính (42) của các ma trận Xi của hệ cơ sở này với các hệ số α_i. Ta xét trường hợp các hệ số α_i là các tham số thực. Các ma trận X và T tương ứng với các tham số thực α_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ được ký hiệu là $X(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)$ và $T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)$. Ta có

$X(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X_i$ (42')

và theo công thức (46)

$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s) = e^{-i\sum_i \alpha_i X_i}$ (47)

Dễ thử lại rằng

$i\frac{\partial T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)}{\partial \alpha_i}\Big|_{\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0} = \mathrm{X_i}$ (48)

cho nên Xi, $i = 1, 2, \ldots, s$, là các vi tử của nhóm biến đổi G đang xét. Với những giá trị vô cùng bé của các tham số $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$ma trận $T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)$ rất gần ma trận đơn vị và có dạng gần đúng

$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)\, I - i\sum_j \alpha_j X_i$. (49)

Cho hai ma trận $T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)$ và $T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)$ là hai yếu tố của nhóm G và hãy thiết lập ma trận

$$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)\, T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)\, T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)^{-1} \text{ và } T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)^{-1}$$

cũng là một yếu tố trong nhóm G. Bằng cách tính trực tiếp có thể thử lại rằng với những tham số $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ và $\beta_1,\ldots,\beta_s$ tất cả đều là vô cùng bé ta có biểu thức gần đúng

$$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)\, T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)\, T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)^{-1} \text{ và } T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)^{-1} I + (-i)^2 \sum_{i,k=1}^{s} \alpha_j \beta_i \left[X_j, X_k\right]. \quad (50)$$

Vì ma trận này là một yếu tố của nhóm G rất gần ma trận đơn vị cho nên theo công thức (49) nó phải có dạng gần đúng

$$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)\, T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)\, T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)^{-1} \text{ và } T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)^{-1}$$

$$\approx I - i\sum_{l=1}^{s} f_l(\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s) X_l$$

trong đó $f_l(\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)$ là hàm của các tham số $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ và $\beta_1, \ldots, \beta_s$ triệt tiêu khi các tham số $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$ hoặc $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s$đồng thời bằng không. Trong phép gần đúng cấp thấp nhất theo các tham số vô cùng bé $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ và $\beta_1, \ldots, \beta_s$ ta có thể viết biểu thức của $f_l(\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)$ dưới dạng tổng quát

$$f_l(\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s) \approx -i\sum_{j,k=1}^{s} \alpha_j \beta_k \gamma_{jkl}$$

với các hệ số không đổi γ_{jkl}, thành thử

$$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)\, T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)\, T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)^{-1}\, T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_s)^{-1}$$

$$\approx I - \sum_{j,k,l=1}^{s} \alpha_j \beta_k \gamma_{jkl} X_l. \quad (51)$$

So sánh hai biểu thức trong vế phải các hệ thức (50) và (51), ta thu được

$$\left[X_j, K_k\right] = \sum_{l=1}^{s} \gamma_{ikl} X_k. \quad (52)$$

Công thức này chứng tỏ rằng các vi tử Xi, $i = 1, 2, \ldots$, s, của nhóm biến đổi G tạo thành một đại số Lie với định nghĩa tích của hai yếu tố của đại số là giao hoán tử của hai ma trận tương ứng.