Các ví dụ về nhóm

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

1. Tập hợp R các số thực tạo thành các nhóm với phép nhân nhóm là phép cộng thông thường: tổng $x + y$ của hai số thực x và y được xem là tích của hai yếu tố x và y của nhóm. Ta biết rằng phép cộng các số thực có tính chất kết hợp. Yếu tố đơn vị của nhóm là số 0. Nghịch đảo của yếu tố x là yếu tố $-x$. Vì phép cộng các số thực có tính chất giao hoán nên R là một nhóm giao hoán. Tương tự như vậy, tập hợp R^n các vectơ trong không gian vectơ thực n chiều tạo thành nhóm với phép nhân nhóm là phép cộng các vectơ: tổng $x+y$ của hai vectơ được xem là tích của hay yếu tố x và y, yếu tố đơn vị là vectơ 0 (tất cả các thành phần đều bằng không), nghịch đảo của yếu tố x là yếu tố $-x$. Đây là một nhóm giao hoán. Nhóm các số nguyên là một nhóm con của nhóm các số thực đối với phép cộng.

2. Tập hợp $R - \{0\}$ các số thực khác không cũng như tập hợp $C - \{0\}$ các số phức khác không đều tạo thành nhóm đối với phép nhân nhóm là phép nhân thông thường có tính kết hợp. Yếu tố đơn vị của nhóm là số 1. Nghịch đảo của x là $\frac{1}{x}$. Các nhóm này cũng là các nhóm giao hoán. Nhóm các số dương khác không là nhóm con của nhóm các số thực khác không đối với phép nhân, nhóm các số thực khác không là nhóm con của nhóm các số phức khác không đối với phép nhân.

3. Tập hợp các ma trận n x n có nghịch đảo tạo thành nhóm đối với phép nhân ma trận. Ta nhắc lại rằng nếu A và B là hai ma trận với các yếu tố ma trận A_{ij} và B_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, thì AB là ma trận với các yếu tố ma trận

$$(AB)_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \equiv A_{ik}B_{kj}$$

Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, nhưng nói chung không giao hoán. Yếu tố đơn vị của nhóm là ma trận đơn vị I mà các yếu tố ma trận bằng

$$I_{ij} = \delta_{ij}$$

Yếu tố nghịch đảo của ma trận A là ma trận nghịch đảo A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Chú ý rằng ma trận tích *AB* có nghịch đảo là

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Tùy theo các yếu tố ma trận là các số thực hay các số phức mà nhóm này được ký hiệu là $GL(n, R)$ hay $GL(n, C)$. Vì các ma trận trên có thể thay đổi liên tục cho nên các nhóm này những nhóm liên tục. Khi không cần chỉ rõ các yếu tố ma trận là các số thực hay số phức thì ta viết $GL(n)$. Nhóm $GL(n, R)$ là nhóm con của nhóm $GL(n, C)$.

Tập hợp các ma trận n x n với định thức bằng 1 cũng tạo thành nhóm đối với phép nhân ma trận, vì rằng nếu A có định thức bằng 1 thì A^{-1} cũng vậy,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$$

nếu A và B đều có định thức bằng 1 thì tích AB cũng vậy,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = 1$$

Tùy theo các yếu tố ma trận là các số thực hay số phức mà ta ký hiệu nhóm này là $SL(n, R)$ hay $SL(n, C)$, còn khi không cần chỉ rõ số thực hay số phức thì ta ký hiệu là $SL(n)$. Nhóm $SL(n)$ là nhóm con của nhóm $GL(n)$.

4. Tập hợn các ma trận trực giao n x n tạo thành nhóm đối với phép nhân ma trận. Ta nhắc lại rằng ma trận chuyển vị A^T của ma trận A có các yếu tố ma trận sau đây

$$(A^T)_{ij} = A_{ij}$$

Từ định nghĩa này suy ra rằng

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

Ma trận thực n x n, ký hiệu là O, có tính chất

$$O^T O = O\,O^T = I$$

gọi ma trận trực giao. Từ đây ta có ngay

$$(O^{-1})T = O = (O^{-1})^{-1},$$

Nghĩa là O^{-1} cũng là ma trận trực giao. Dễ thử lại rằng nếu O_1 và O_2 là hai ma trận trực giao

Các ví dụ về nhóm

$O_1^T = O_1^{-1}, O_2^T = O_2^{-1}$

Thì tích O_1O_2 cũng là ma trận trực giao

$(O_1O_2)T = O_2^T O_1^T = O_2^{-1} O_1^{-1} = (O_1O_2)^{-1}$.

Quả thật các ma trận trực giao n x n tạo thành nhóm, ký hiệu là $O(n)$.

Tương tự, các ma trận trực giao n x n với định thức bằng 1 cũng tạo thành nhóm ký hiệu là $SO(i)$.

5. Tập hợp các ma trận unita n x n tạo thành nhóm đối với phép nhân ma trận. Ta nhắc lại rằng ma trận liên hợp hermitic A^+ của ma trận A có các yếu tố ma trận sau đây

$(A^+)_{ij} = (A_{ji})^*$,

nghĩa là

$A^+ = (A^T)^*$

Từ định nghĩa này suy ra rằng

$(A B)^+ = B^+ A^+$.

Ma trận phức n x n, ký hiệu là U, có tính chất

$U^+ U = UU^+ = I$

nghĩa là

$U^+ = U^{-1}$

gọi là ma trận của unita. Từ đây ta có ngay

$(U^{-1})^+ = U = (U^{-1})^{-1}$,

Nghĩa là U^{-1} cũng là mà trạn unita. Dễ thử lại nếu U_1 và U_2 là hai ma trận unita,

$U_1^+ = U_1^{-1}, U_2^+ = U_2^{-1}$,

thì tích U_1U_2 cũng là ma trận unita,

$(U_1U_2)^+ = U_2^+ U_1^+ = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1U_2)^{-1}$

Quả thật là các ma trận unita *n* x *n* tạo thành nhóm, gọi là nhóm *U(n)*.

Tương tự, các ma trận unita *n* x *n* với định thức bằng 1 cũng tạo thành nhóm, gọi là nhóm *SU*(*n*). Nhóm *SU*(*n*) là nhóm con của nhóm *U*(*n*).

6. Tập hợp các phép tịnh tiến của một không gian thực n chiều tạo thành nhóm đối với phép nhân nhóm định nghĩa như sau: thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến, ta được phép tịnh tiến gọi là tích của chúng. Ký hiệu là T_a và T_b hai phép tịnh tính không gian trong đó điểm *r* bất kỳ chuyển thành *r* + *a* và *r* + *b,*

T_a: $r \rightarrow r + a$,

T_b: $r \rightarrow r + b$.

Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến này, ta có

$T_b \cdot T_a : r \rightarrow r + a \rightarrow r + b + a$

Hai phép tịnh tiến này cho kết quả tương đương với phép tịnh tiến T_{b+a}

T_{b+a}: $r \rightarrow r + b + a$.

Vậy ta có

$T_{b+a} = T_b \cdot T_a$

Yếu tố đơn vị của nhóm là

$T_0 = I$

Dễ thử lại rằng

$T_{-a} = (T_a)^{-1}$

Các nhóm tịnh tiến không gian thực n chiều tạo thành nhóm tịnh tiến *T*(*n*). Đó là một nhóm giao hoán. Nhóm tịnh tiến đẳng cấu với nhóm các vectơ trong không gian mà phép nhân nhóm là phép cộng các vectơ.

7. Tập hợp các phép biến đổi tuyến tính không kỳ dị của một không gian vectơ *n* chiều tạo thành nhóm đối với phép nhân nhóm định nghĩa như sau: thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi tuyến tính không kỳ dị *A* rồi đến *B*, ta được kết quả tương đương với thực hiện một phép biến đổi tuyến tính không kỳ dị ký hiệu là BA và được coi là tích của A và B. Xét hệ các vectơ cơ sở độc lập tuyến tính $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của không gian n chiều đã cho. Biến đổi tuyến tính A chuyển các vectơ này thành các vectơ $e'_1, e'_2, .., e'_n$

$$Ae_i = e'_i$$

gọi là không kỳ dị nếu có biến đổi tuyến tính ký hiệu là A^{-1} chuyển ngược lại các vectơ e'_i thành e_i,

$$A^{-1}e'_i = e_i$$

Định nghĩa tích của hai phép biến đổi mà ta phát biểu vắn tắt ở trên được cụ thể hóa như sau. Xét một vectơ bất kỳ r trong không gian vectơ n chiều đã cho. Phép biến đổi tuyến tính không kỳ dị A chuyển vectơ này thành vectơ r':

$$r \xrightarrow{A} r' = Ar.$$

Tiếp theo sau phép biến đổi A ta thực hiện phép biến đổi tuyến tính không kỳ dị B. Phép biến đổi này chuyển thành vectơ r' thành vectơ r''

$$r' \xrightarrow{B} r'' = Br' = B\,(Ar).$$

Kết quả là ta thu được một phép biến đổi tuyến tính chuyển vectơ r thành vectơ r'' ký hiệu là (BA):

$$r' \xrightarrow{AB} r'' = Br' = B\,(Ar) = (BAr)$$

Ta coi biến đổi (BA) này là tích của hai biến đổi A và B và còn ký hiệu nó là BA. Yếu tố đơn vị của nhóm là phép đồng nhất I:

$$Ie_i = e_i$$

Vì các vectơ cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là độc lập tuyến tính cho nên tất cả các vectơ e'_i đều có thể được biểu diễn dưới dạng các tổ hợp tuyến tính của các vectơ cơ sở này

$$e'_i = e_j A_{ji}$$

Ma trận với các yếu tố ma trận A_{ij} hoàn toàn xác định phép biến đổi A

$$Ae_i = e_j A_{ji}$$

Ta cũng ký hiệu ma trận này là A. Tương tự như vậy, phép biến đổi B được diễn tả bởi ma trận B với các yếu tố ma trận B_{kj},

$$Be_j = e_k B_{kj}$$

Tác dụng liên tiếp hai phép biến đổi A và B, ta có

$$B Ae_i = B(e_j A_{ji}) = (Be_j) A_{ji} = e_k B_{kj} A_{ji} = e_k (B A)_{ki}$$

Vậy biến đổi tích $B A$ có ma trận là tích của hai ma trận của hai phép biến đổi B và A. Biến đổi đồng nhất có ma trận là ma trận đơn vị. Biến đổi nghịch đảo có ma trận là ma trận nghịch đảo. Vậy nhóm các biến đổi tuyến tính không kỳ dị của không gian vectơ n chiều đẳng cấu với nhóm $GL(n)$ các ma trận n x n có nghịch đảo mà ta đã xét ở trên. Ta cũng gọi đó là nhóm $GL(n)$.

8. Tập hợp các phép quay của không gian Euclide thực n chiều quanh gốc tọa độ tạo thành nhóm đối với phép nhân nhóm định nghĩa như sau: thực hiện hai phép quay liên tiếp ta được một phép quay thứ ba là tích của chúng. Phép biến đổi đồng nhất (không quay tí nào cả) là yếu tố đơn vị. Phép quay ngược lại là yếu tố nghịch đảo. Ta nhắc lại rằng trong không gian Euclide thực n chiều ta có thể chọn hệ vectơ đơn vị cơ sở e_1, e_2, …, e_n trực giao chuẩn hóa, nghĩa là thỏa mãn điều kiện

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Trong phép quay O các vectơ này chuyển thành $e'_1, e'_2, .., e'_n$ cũng trực giao chuẩn hóa

$$(e'_1, e'_2) = \delta_{ij}$$

Thay vào đây các biểu thức viết ở trên biểu diễn e'_i qua e_j và dùng tính chất trực giao chuẩn hóa của các vectơ e_i , ta thu được hệ thức

$$O_{ki} O_{kj} = \delta_{ij}$$

Vậy ma trận O với các yếu tố ma trận O_{ij} thỏa mãn điều kiện

$$O^T O = I$$

Nhân từ bên phải cả hai vế với O^{-1}, ta có

$$O^T = O^{-1}$$

nghĩa là ma trận của phép quay phải là ma trận trực giao. Từ điều kiện ma trận trực giao còn suy ra rằng

$$\det O^T \cdot \det O = (\det O)^2 = 1$$

nghĩa là

$$\det O = \pm 1$$

Vì mà trận của phép biến đổi đồng nhất có định thức bằng +1, mà các phép quay lại là các phép biến đổi liên tục, cho nên định thức không thể nhảy từ +1 sang -1. Vậy ta phải có

$$\det O = 1$$

Tóm lại, nhóm các phép quay trong không gian Eucide thực *n* chiều đẳng cấu với nhóm $SO(n)$. Ta cũng gọi nhóm quay này là nhóm $SO(n)$.

9. Trong không gian Euclide phức n chiều với tích vô hướng xác định dương có các tính chất sau đây

$$(b, a_1 + a_2) = (b, a_1) + (b, a_2)$$

$$(b_1 + b_2, a) = (b_1, a) + (b_2, a)$$

$$(b, a) = (a, b)^*,$$

$$(b, \lambda a) = \lambda(b, a)$$

với mọi số phức λ và do đó

$$(\lambda b, a) = \lambda^* (b, a)$$

tập hợp các phép biến đổi tuyến tính từ *u* bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ bất kỳ

$$(ua, ub) = (a, b)$$

Tạo thành nhóm đối với phép nhân của hai phép biến đổi được định nghĩa là sự thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi đó.

Trong không gian vectơ đang xét ta hãy chọn hệ vectơ đơn vị cơ sở trực giao chuẩn hóa $e_1, e_2, \ldots, e_n$,

$(ei, ej) = \delta ij, i, j = 1, 2, \ldots, n$

Phép biến đổi từ U chuyển các vectơ này thành các vectơ đơn vị mới $e'_1, e'_2, .., e'_n$

$e'_i = Ue_i = e_j u_{ji}$

Vì biến đổi U bảo toàn các tính vô hướng cho nên

$(e'_i e'_j) = (U e_i, U e_j) = (e_k, e_i) U_{ki} U_{ij} = U_{ki} U_{kj} = U^+_{ik} u_{kj} = \delta_{ij}$

Trong đó U^+ là ma trận liên hợp hermitic của U. Do đó ta có hệ thức

$U^+ U = I$

hay là

$U^+ = U^{-1}$

Ma trận của các phép biến đổi U bảo toàn tích vô hướng trong không gian Euclide phức n chiều là các ma trận unita n x n. Vậy nhóm các phép biến đổi tuyến tính bảo toàn tích vô hướng trong không gian Euclide phức n chiều đẳng cấu với nhóm $U(n)$. Ta cũng gọi đó là nhosmm $U(n)$. Nếu ta đặt thêm điều kiện định thức của các phép biến đổi phải bằng 1 thì ta có nhóm $SU(n)$.