Nhóm SU(2) các biến đổi unita với định thức bằng 1 trong không gian Euclide phức 2 chiều

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Trong đoạn này chúng ta khảo sát chi tiết về nhóm $SU(2)$ các biến đổi tuyến tính bảo toàn tích vô hướng và có định thức bằng 1 của không gian Euclide phức hai chiều. Nhiều công thức và một số lập luận trình bày dưới đây thường hay được áp dụng khi nghiên cứu những vấn đề trong nhiều lĩnh vực của vật lý lượng tử. Trong hệ vectơ đơn vị cơ sở giao chuẩn hoa smooix phép biến đổi thuộc nhóm $SU(2)$ được diễn tả bởi một ma trận 2 x 2 unita U.

$U^{+} = U^{-1}$,

Và có định thức bằng 1,

$\det U = 1$

Yếu tố đơn vị của nhóm là ma trận đơn vị I. Yếu tố có ma trận bằng U_{-1} là nghịch đảo của yếu tố có ma trận bằng U.

Để tìm các tham số độc lập cũng như các vi tử tương ứng ta hãy xét các biến đổi vô cùng gần yếu tố đơn vị, nghĩa là các phép biến đổi mà các ma trận có dạng.

$U(\delta\alpha_i) = I - i X(\delta\alpha_i)$,

Trong đó ma trận $X(\delta\alpha_i)$ là đại lượng cấp 1 đối với các tham số thực vô cùng bé $\delta\alpha_i$. Bỏ qua các số hạng cấp 2, ta có

$[U(\delta\alpha_i)]^{-1} = I + i X(\delta\alpha_i)$, Mặt khác,

$$\left[U(\delta\alpha_i)\right]^+ = I + \left[X(\delta\alpha_i)\right]^+$$

Từ điều kiện ma trận $U(\delta\alpha_i)$ phải là ma trận unita

$$U(\delta\alpha_i)^{-1} = \left[U(\delta\alpha_i)\right]^+$$

suy ra rằng ma trận $X(\delta\alpha_i)$ phải tự liên hợp, nghĩa là

$$X(\delta\alpha_i)^+ = X(\delta\alpha_i).$$

Do đó hai yếu tố chéo của ma trận $X(\delta\alpha_i)$ phải là hai số thực

$$\left[X(\delta\alpha_i)\right]_{jj} = \left[X(\delta\alpha_i)\right]jj,\ j = 1, 2$$

Còn hai yếu tố không chéo của ma trận này thì phải liên hợp phức với nhau

$$\left[X(\delta\alpha_i)\right]_{12} = \left[X(\delta\alpha_i)\right]21$$

Nếu không đặt thêm điều kiện gì khác thì ma trận tự liên hợp $X(\delta\alpha_i)$ chứa bốn tham số thực độc lập với nhau. Nhưng ta còn có điều kiện định thức của $U(\delta\alpha_i)$ phải bằng 1. Bỏ qua các số hạng cấp cao ta có

$$\det\left[U(\delta\alpha_i)\right] = 1 - i\ \mathrm{Tr}\left[X(\delta\alpha_i)\right].$$

Vậy ma trận $X(\delta\alpha_i)$ phái có vết bằng không

$$\mathrm{Tr}\left[X(\delta\alpha_i)\right] = 0$$

hai yếu tố chéo phải có độ lớn bằng nhau và ngược dấu. Tóm lại, ma trận 2 x 2 tự liên hợp và có vết bằng không $X(\delta\alpha_i)$ biểu diễn qua bat ham số thực độc lập vo cùng bé $\delta\alpha_i$, i = 1, 2, 3 và ta có

$$U(\delta\alpha_i) = I - i\,\delta\alpha_i s_i = I - i\,\delta\alpha \cdot s$$

Trong đó các vi tử s_i, $i = 1, 2, 3$ là ma trận 2 x 2 tự liên hợp độc lập tuyến tính và có vết bằng không, $\delta\alpha$là vectơ ba chiều với các thành phần $\delta\alpha_i$, s là ma trận vectơ ba chiều với các thành phần s_i. Để cho sau này được thuận tiện ta chọn các ma trận si bằng các ma trận Pauli σ_i nhân với $\frac{1}{2}$:

Nhóm SU(2) các biến đổi unita với định thức bằng 1 trong không gian Euclide phức 2 chiều

$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

$\sigma 1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma 2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma 3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Dễ thử lại rằng các ma trận Pauli đều có bình phương bằng ma trận đơn vị

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$,

hai ma trận Pauli khác nhau phản giao hoán với nhau và có tích bằng

$\sigma_1\sigma_2 = - \sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = - \sigma_3\sigma_2 = i\,\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = - \sigma_1\sigma_3 = i\,\sigma_2$.

Các hệ thức của bình phương ma trận Pauli và tích hai ma trận Pauli khác nhau có thể viết gộp lại như sau

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

Từ đây suy ra các hệ thức giao hoán

$[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

Chia các ma trận σ_i cho 2 ta được các ma trận s_i thỏa mãn các hệ thức giao hoán giống như các hệ thức giao hoán giữa các vi tử S_i của nhóm SO(3), cụ thể là

$\left[s_i,s_j\right] = i\varepsilon_{ijk}s_k$

Coi các ma trận *si*, $i = 1, 2, 3$ là các yếu tố và giao hoán tử $\left[s_i,s_j\right]$ là tích của hai yếu tố s_i và s_j, ta thiết lập được một đại số Lie của nhóm *SU*(2). Ta thấy đó cũng chính là đại số Lie của nhóm *SO*(3) đã thành lập ở trên.

Sau khi đã thu được biểu thức của các biến đổi $U(\ \delta\alpha_i)$ rất gần yếu tố đơn vị, với các tham số vô cùng bé $\delta\alpha_i$, bây giờ các hãy mở rộng các lập luận ở trên để thiết laapjbieeru thức của phép biến đổi bất kỳ $U(\ \alpha_i)$ của nhóm *SU*(2) phụ thuộc vào các tham số thực α_i , có các giá trị hữu hạn. Ta cũng sẽ thấy rằng có ba tham số độc lập. Trước hết ta chú ý rằng mọi ma trận unita $U(\ \alpha_i)$ đều có thể viết dưới dạng

$U(\alpha_i) = e^{-iX(\alpha_i)}$,

Trong đó $X(\ \alpha_i)$ là ma trận tự liên hợp

$\left[X(\alpha_i)\right]^+ = X(\alpha_i)$

Làm một phép biến đổi thích hợp của hệ tọa độ để đưa ma trận tự liên hợp $X(\alpha_i)$ về dạng chéo, ta có thể chứng minh rằng định thức của ma trận $U(\alpha_i)$ biểu diễn qua vết của ma trận $X(\alpha_i)$như sau

$$\det\left[U(\alpha_i)\right] = e^{-1\mathrm{Tr}\left[X(\alpha_i)\right]}$$

Từ điều kiện định thức của $U(\alpha_i)$ phải bằng 1 suy ra rằng vết của ma trận $X(\alpha_i)$ phải bằng không

$$\left[X(\alpha_i)\right] = 0$$

Vì rằng có ba ma trận 2 x 2 độc lập tuyến tính, tự liên hợp và có vết bằng không, cho nên ma trận 2 x 2 tự liên hợp có vết bằng không $X(\alpha_i)$ phụ thuộc vào ba tham số thực α_i , $i = 1, 2, 3$ và có thể viết như sau

$$\left[X(\alpha_i)\right] = \tfrac{1}{2}\alpha_i\sigma_i = \tfrac{1}{2}\alpha\sigma$$

Vậy ma trận của phép biến đổi bất kỳ thuộc nhóm $SU(2)$ có dạng tổng quát

$$U(\alpha_i) = e^{-\frac{1}{2}\alpha_i\sigma_i} = e^{-\frac{1}{2}\alpha\sigma}$$

Xét các trường hợp khi mà chỉ có một tham số α_k trong ba tham số α_1, α_2, α_3 là khác không, còn hai tham số kia bằng không. Ta có

$$U(\alpha_k = \varphi, \alpha_{i \neq k} = 0) = U^{(k)}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\varphi\sigma k}$$

Khai triển hàm mũ thành chuỗi lũy thừa và dùng tính chất

$$\delta_k^2 = 1,$$

ta thu được

$$U^{(k)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2n} - i\,\sigma_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2n+1} = \cos\frac{\varphi}{2} - i\,\sigma_k \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Với $k = 1, 2$ ta có

Nhóm SU(2) các biến đổi unita với định thức bằng 1 trong không gian Euclide phức 2 chiều

$$U^{(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

$$U^{(2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

Còn với $k = 3$

$$U^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix},$$

Mỗi loạt các phép biến đổi $U^{(k)}(\varphi)$ với k cố định tạo thành một nhóm con một tham số của nhóm $SU(2)$. Các ma trận $U^{(k)}(\varphi)$ là các hàm khả vi của φ cho nên nhóm $SU(2)$ là một nhóm Lie.

Bây giờ ta quay lại yếu tố có dạng tổng quát $U(\alpha_i)$ và ký hiệu n là vectơ đơn vị hướng theo vectơ **α**

$n = \frac{\alpha}{\alpha}$.

Dùng các hệ thức đã viết ở trên đối với tích của các ma trận Pauli, dễ thử lại rằng

$(\sigma n)^2 = 1$.

Khai triển hàm mũ $e^{-\frac{1}{2}\alpha(\sigma n)}$ thành chuỗi lũy thừa, ta lại thu được

$U(\alpha_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} - i(\sigma n)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1} = \cos\frac{\alpha}{2} - i\,\sigma_k \sin\frac{\alpha}{2}$

Vậy biểu thức sau đây của yếu tố bất kỳ của nhóm SU(2)

$U(\alpha_i) = \cos\frac{\alpha}{2} - i\frac{\sigma\alpha}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Các ma trận thuộc nhóm $SU(2)$ có định thức bằng 1. Nếu ta không đòi hỏi định thức của ma trận 2 x 2 của phép biến đổi unita phải bằng 1 thì ta có nhóm $U(2)$. Bây giờ ma trận $X(\alpha_i)$ không nhất thiết phải có vết bằng không và do đó phụ thuộc bốn tham số, ba tham số là thành phần của vectơ ba chiều αđã xét ở trên và một tham số mới α_0. Ma trận 2 x 2 tự liên hợp (α_i) phụ thuộc bốn tham số được biểu diễn qua bốn ma trận 2 x 2 tự liên hợp độc lập tuyến tính là ba ma trận Pauli σ_i, i = 1, 2, 3 và ma trận đơn vị I ký hiệu là σ_0,

$$X(\alpha_i) = \tfrac{1}{2}\alpha_0\sigma_0 + \tfrac{1}{2}\alpha\sigma.$$

Ngoài ba nhóm con một tham số gồm các biến đổi $U^{(k)}(\varphi)$ đã xét ở trên bây giờ ta có thêm một nhóm con một tham số nữa là nhóm $U(1)$ với các phép biến đổi

$$U^{(0)}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\varphi}.$$

Các biến đổi này giao hoán với các biến đổi của nhóm $SU(2)$ và do đó nhóm $U(2)$ là tích trực tiếp của nhóm $U(1)$ và nhóm $SU(2)$.

$$U(2) = U(1) \otimes SU(2).$$

Bây giờ ta dẫn ra ở đây một số công thức đối với các ma trận Pauli mà ta thường dùng khi nghiên cứu các vấn đề thuộc nhiều lĩnh vực của vật lý lượng tử. Trước hết ta chú ý rằng vết của các ma trận Pauli bằng không

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i) = (\sigma_i)_{\alpha\alpha} = 0$$

còn tích của hai ma trận Pauli có vết bằng

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = (\sigma_i)_{\alpha\beta}(\sigma_i)_{\beta\alpha} = 2\,\delta_{ij}$$

Ba ma trận Pauli $\sigma_i$và ma trận đơn vị I tạo thành bốn ma trận n x n độc lập tuyến tính. Mọi ma trận 2 x 2 đều có thể triển khai theo bốn ma trận này như sau

$$A_{\alpha\beta} = A_0\delta_{\alpha\beta} + \mathrm{A_i}(\sigma_i)_{\alpha\beta} = A_0\delta_{\alpha\beta} + \mathrm{A}\,(\sigma)_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta = 1, 2$$

hay là

$$A = A_0 I + A_i\,\sigma_i = A_0 I + A\,\sigma$$

Lấy vết cả hai vế hệ thức trên, ta có

$$A_0 = \tfrac{1}{2}A_{\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(A).$$

Còn nếu nhân cả hai vế hệ thức đó với σ_k xong rồi mới lấy vết thì ta thu được

$$A_k = \tfrac{1}{2}A_{\alpha\beta}(\sigma_k)_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_k)$$

hay là

$A = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}(\sigma)_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}Tr(A\sigma)$.

Các ma trận σ_1 và $\sigma_3$là đối xứng

$(\sigma_1)T = \sigma_1$, $(\sigma_3)T = \sigma_3$

nghĩa là

$(\sigma_1)_{\alpha\beta} = (\sigma_1)_{\beta\alpha}$, $(\sigma_3)_{\alpha\beta} = (\sigma_3)_{\beta\alpha}$,

còn ma trận $\sigma_2$là phản đối xứng

$(\sigma_2)T = -\sigma_2$,

nghĩa là

$(\sigma_2)_{\alpha\beta} = -(\sigma_2)_{\beta\alpha}$.

Từ các tính chất đối xứng hoặc phản đối xứng này của cá ma trận Pauli và tính chất phản giao hoán của các ma trận Pauli khác nhau suy ra hệ thức

$\sigma_2\sigma_i\sigma_2 = -\sigma_i^T$.

Nhân cả hai vế của hệ thức này với σ_2 từ bên phải hoặc từ bên trái và thực hiện các phép tính toán thích hợp tiếp theo, ta sẽ có

$\sigma_2\sigma_i = -\sigma_i^T\sigma_2 = \sigma_i^T\sigma_2^T = (\sigma_2\sigma_1)^T$,

$\sigma_i\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_i^T = \sigma_2^T\sigma_i^T = (\sigma_i\sigma_2)^T$.

Vậy các ma trận $\sigma_2\sigma_i$ và $\sigma_i\sigma_2$là các ma trận đối xứng,

$(\sigma_2\sigma_i)^T = (\sigma_2\sigma_i)$, $(\sigma_i\sigma_2)^T = (\sigma_i\sigma_2)$,

nghĩa là

$(\sigma_2\sigma_i)_{\alpha\beta} = (\sigma_2\sigma_i)_{\beta\alpha}$, $(\sigma_i\sigma_2)_{\alpha\beta} = (\sigma_i\sigma_2)_{\beta\alpha}$,

So sánh các kết quả vừa thu được đối với nhóm $SU(2)$ và các kết quả trình bày ở trên về nhóm quay $SO(3)$, ta thấy có một sự tương tự: cả hai nhóm đều là các nhóm Lie bat ham số, các vi tử của chúng thỏa mãn những hệ thức giao hoán giống hệt nhau. Ta hãy chứng minh rằng nhóm *SO(*3) đồng cấu với nhóm *SU*(2).

Xét một vectơ *r* trong không gian ba chiều. Từ ba thành phần $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$ của vectơ này ta hãy lập ra ma trận R sau đây

$$R = r\sigma = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$

Dùng các tính chất của các ma trận Pauli σ_i mà ta đã trình bày ở trên, dễ thấy rằng các thành phần của vectơ r được biểu diễn ngược lại qua ma trận *R* như sau

$$r_i = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(R\sigma_i)$$

hay là

$$r = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(R\sigma)$$

Tính định thức của ma trận *R*, ta thu được

$$\det R = - r^2 .$$

Cho *U* là một yếu tố của nhóm *SU*(2) và xét phép biến đổi tuyến tính sau đây của ma trận *R*

$$R \to R' = U R U^{+}.$$

Ký hiệu vectơ trong không gian ba chiều tương ứng với ma trận R' là r':

$$R' = r'\sigma.$$

Trong phép biến đổi R thành R', vectơ r chuyển thành r'

$$R \to R' \qquad r \to r'.$$

Ta ký hiệu phép biến đổi này của không gian ba chiều là *O*,

$$r' = O\, r,$$

và thiết lập được sự tương ứng giữa mỗi yếu tố *U* của nhóm *SU*(2) với một phép biến đổi *O* của không gian ba chiều

$$U \to O.$$

$\Rightarrow$

Trước hết, ta hãy chứng minh rằng phép biến đổi *O* bảo toàn chiều dài của các vectơ trong không gian ba chiều. Thực vậy, ta có

$$r'^2 = -\det R' = -\det(U R U^+) = -(\det U)(\det R)(\det U^+) = -\det R = r^2$$

Vậy *O* là phép quay hoặc là tổ hợp của phép quay và phép nghịch đảo hoặc / và phép phản xạ gương. Dùng các biểu thức đã cho ở trên của các yếu tố $U^{(k)}(\varphi)$, $k = 1, 2, 3$, của các nhóm con một tham số trong nhóm *SU*(2) rồi thực hiện phép nhân ma trận để tìm các ma trận

$$U^{(k)}(\varphi)\, R U^{(k)}(\varphi)^+$$

ta thu được ngay ma trận của các phép biến đổi biến đổi *O* tương ứng của không gian ba chiều. Kết quả là ta có sự tương ứng sau đây giữa các yếu tố $U^{(k)}(\varphi)$, $k = 1, 2, 3$ và các phép quay $C_x(\varphi)$, $C_y(\varphi)$, $C_z(\varphi)$,:

$$U^{(1)}(\varphi) \rightarrow Cx(\varphi),$$

$$U^{(2)}(\varphi) \rightarrow Cy(\varphi),$$

$$U^{(3)}(\varphi) \rightarrow C_z(\varphi).$$

Dễ thử lại rằng sự tương ứng nói trên giữa các yếu tố của hai nhóm bảo toàn phép nhân nhóm. Vậy ta đã thiết lập được sự đồng cấu của nhóm *SU*(2) lên nhóm *SO*(3). Chú ý rằng nếu tat hay *U* bằng –*U* thì ta vẫn được cùng một phép quay *O*. Vậy trong phép đồng cấu của nhóm *SU*(2) lên nhóm *SO*(3) hai yếu tố trái dấu nhau của nhóm *SU*(2) tương ứng với cùng một yếu tố của nhóm *SO*(3). Nhóm *SO*(3) đồng cấu nhưng không đẳng cấu với nhóm *SU*(2).