Hàm đặc trưng của biểu diễn

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Cho một biểu diễn T của nhóm G trong không gian vectơ L thứ nguyên d. Trong không gian L hãy chọn một vectơ đơn vị cơ sở e_1, e_2, …, e_d và ký hiệu các yếu tố ma trận của các toán tử tuyến tính $T(a)$, aG, đối với hệ đơn vị cơ sở này là $T_{ij}(a)$, $i, j = 1, 2, \ldots, d$,

$$T(a)\, e_i = e_j\, T_{ji}(a) \qquad (29)$$

Thực hiện một phép biến đổi tuyến tính X, ta chuyển hệ vectơ đơn vị cơ sở đã cho e_1, e_2, …, $e_d$thành một hệ vectơ mới e'_1, e'_2, …, e'_d. Đối với hệ mới này các toán tử tuyến tính $T(a)$ có các yếu tố ma trận $T'_{ij}(a)$,

$$T(\mathrm{a})\, e'_i = e'_j\ \ T'_{ji}(a) \qquad (30)$$

Hãy tìm mối liên hệ giữa các yếu tố ma trận $T_{ij}(a)$ và $T'_{ij}(a)$. Ký hiệu các yếu tố ma trận của toán tử X đối với hệ vectơ đơn vị cơ sở e_1, e_2, …, e_d là X_{ij}. Ta có

$$e'_i = X\, e_i = e_j\, X_{ji} \qquad (31)$$

Thay biểu thức (31) của e'_ivào cả hai vế của hệ thức (30), ta thu được

$$T(a)\, e_j\, X_{ji} = e_k\, X_{kj}\, T'_{ji}(a) \qquad (32)$$

Dùng biểu thức (29) của $T(a)\, e_j$, ta viết lại công thức (32) như sau

$$e_k\, T_{kj}(a)\, X_{ji} = e_k\, T_{kj}(a)\, T'_{ji}(a)\,.$$

Vậy

$$T_{kj}(a)\, X_{ji} = X_{kj}\ T'_{ji}(a)\,. \qquad (33)$$

Nhân cả hai vế của hệ thức (33) với $(X^{-1})_{lk}$ rồi cộng theo k từ 1 đến d, ta thiết lập được hệ thức giữa $T_{ij}(a)$ và $T'_{ij}(a)$:

Hàm đặc trưng của biểu diễn

$$T'_{li}(a) = (X^{-1})_{lk}\, T_{kj}(a)\, X_{ji} \qquad (34)$$

Vậy trong hai hệ vectơ đơn vị cơ sở liên hệ với nhau bởi hệ thức (31), toán tử $T(a)$ có các yếu tố ma trận khác nhau $T_{ij}(a)$ và $T'_{ij}(a)$ liên hệ với nhau bởi công thức (34).

Từ các yếu tố ma trận khác nhau $T_{ij}(a)$ và $T'_{ij}(a)$ của cùng một toán tử $T(a)$ ta có thể thiết lập được một đại lượng đặc trưng cho biểu diễn T mà không phụ thuộc và sự lựa chọn hệ cơ sở. Thực vậy, đặt $l = i$ trong cả hai vế của hệ thức (34) rồi cộng theo i từ 1 đến d, ta có

$$T'_{il}(a) = (X^{-1})_{ik}\, T_{kj}(a)\, X_{ji} = T_{kj}(a)\, X_{ji}\, (X^{-1})_{tk} = T_{kj}(a)\, \delta_{jk} = T_{kk}(a)$$

Vậy vết của ma trận của phép biến đổi $T(a)$ không phụ thuộc sự lựa chọn hệ vectơ đơn vị cơ sở và có thể được dùng làm đại lượng đặc trưng cho biểu diễn T mà ta đang xét. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa hàm đặc trưng của biểu diễn

Cho một biểu diễn T của nhóm G trong không gian vectơ L. Vết của các ma trận phép biến đổi $T(a)$ của biểu diễn này, aG, không phụ thuộc sự lựa chọn hệ vectơ đơn vị cơ sở trong không gian L và được gọi là hàm đặc trưng $\chi(a)$của biểu diễn T:

$$\chi(a) = T_{ii}(a) = \mathrm{Tr}\,[T(a)],\ a \in G, \qquad (35)$$

Các mệnh đề về hàm đặc trưng

Từ định nghĩa của hàm đặc trưng của biểu diễn suy ra một số mệnh đề cơ bản.

Mệnh đề 1

Các biểu diễn tương đương có cùng một hàm đặc trưng.

Chứng minh. Giả sử có hai biểu diễn tương đương $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ của cùng một nhóm G trong hai không gian vectơ L_1 và L_2. Khi đó có một toán tử tuyến tính X chuyển các vectơ của không gian L_1 thành cac vectơ không gian L_2 sao cho

$$T^{(2)}(a) = X\, T^{(1)}(a)\, X^{-1} \qquad (36)$$

Ký hiệu $\chi^{(i)}$(a) là các hàm đặc trưng của hai biểu diễn đã cho

$$\chi^{(1)}(a) = \mathrm{Tr}\left[T^{(1)}(a)\right],$$

Hàm đặc trưng của biểu diễn

$\chi^{(2)}(a) = \mathrm{Tr}\left[T^{(2)}(a)\right]$.

Tính vết của các ma trận của các toán tử trong hai vế của hệ thức (36) đối với các vectơ đơn vị cơ sở bất kỳ và dùng tính chất sau đây của vết của tích hai toán tử A và B.

$\mathrm{Tr}\,[AB] = \mathrm{Tr}\,[BA]$,

ta thu được

$\chi^{(2)}(a) = \mathrm{Tr}\left[T^{(2)}(a)\right] = \mathrm{Tr}\left[XT^{(1)}(a)X^{-1}\right] = \mathrm{Tr}\left[X^{-1}XT^{(1)}(a)\right] = \mathrm{Tr}\left[T^{(1)}(a)\right] = \chi^{(1)}(\mathrm{a})$

Vậy hàm đặc trưng $\chi^{(1)}(a)$ và $\chi^{(2)}(a)$ của hai biểu diễn tương đương $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ bằng nhau.

Cho một biểu diễn hoàn toàn khả quy T trong không L thứ nguyên d, là tổng trực giao của hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T(^{2)}$ trong hai không gian con bất biến L_1 và L_2 thứ nguyên d_1 và d_2, $d = d_1 + d_2$. Ký hiệu các hàm đặc trưng của các biểu diễn T, $T_{(1)}$ và $T_{(2)}$ là $\chi^{(1)}(a)$ và $\chi^{(2)}(a)$. Các hàm đặc trưng này không phụ thuộc sự lựa chọn các hệ vectơ đơn vị cơ sở trong các không gian vectơ L, L_1 và L_2. Để thuận tiện khi thiết lập giữa các hàm đặc trưng này hãy chọn các hệ vectơ đơn vị cơ sở e_1, e_2, …, ed trong không gian L_1 và f_1, f_2, …, f_{d_2}trong không gian L_2 rồi chọn các vectơ e_1, e_2, …, ed, f_1, f_2, …, f_{d_2}làm hệ đơn vị cơ sở trong không gian L. Đối với hệ này ma trận của các phép biến đổi $T(a)$ có dạng chéo theo ô như sau

$$T(a) = \begin{array}{c} \\ d_1\{ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{T^{(1)}(a)}^{d_1} & 0 \\ 0 & \underbrace{T^{(2)}(a)}_{d_2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \}d_2 \end{array}$$

Từ đây suy ra rằng

$\chi(a) = \mathrm{Tr}\,[T(a)] = \mathrm{Tr}\left[T^{(1)}(a)\right] + \left[T^{(2)}(a)\right] = \chi^{(1)}(a) + \chi^{(2)}(a)$

Mở rộng lập luận ở trên cho trường hợp biểu diễn T là tổng trực tiếp của các biểu diễn tối giản không tương đương $T^{(\alpha)}$ với α= 1, 2,…, mà biểu diễn tối giản $T^{(\alpha)}$ được chứa n_αlần trong biểu diễn T, ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2

Nếu biểu diễn hoàn toàn khả quy T là tổng trực giao của các biểu diễn tối giản không tương đương $T^{(\alpha)}$ với α= 1, 2, …, mà biểu diễn tối giản $T^{(\alpha)}$ được chứa n_αlần trong biểu diễn T, thì hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}(a)$ của các biểu diễn $T(^{\alpha})$ như sau:

$\chi^{(\alpha)} = \sum_\alpha n_\alpha \chi^{(\alpha)}(a)$.

Hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}$ của một biểu diễn T là một hàm trên nhóm. Xét giá trị của hàm này trên hai yếu tố liên hợp với nhau a và $b\ a\ b^{-1}$, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 3

Trên hai yếu tố liên hợp với nhau a và $b\ a\ b^{-1}$, trong đó a và b là hai yếu tố tùy ý của nhóm G, hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}$ của một biểu diễn T có cùng một giá trị, nghĩa là

$\chi^{(\alpha)} = \chi(b\ a\ b^{-1}), \forall\ a \in G, \forall\ b \in G.$

Chứng minh. Theo định nghĩa của hàm đặc trưng ta có

$\chi^{(\alpha)} = \mathrm{Tr}\ [T(a)]$,

$\chi(b\ a\ b^{-1}) = \mathrm{Tr}\ \left[T(bab^{-1})\right] = \mathrm{Tr}\ \left[T(b)T(a)T(b^{-1})\right] = \mathrm{Tr}\ \left\{T(b)T(a)\left[T(b^{-1})\right]\right\} = \mathrm{Tr}\ \left\{\left[T(b^{-1})\right]T(b)T(a)\right\} = \mathrm{Tr}\ [T(a)] = \chi^{(\alpha)}$

Vậy mệnh đề đã được chứng minh.

Theo mệnh đề này trên tất cả các yếu tố của một lớp các yếu tố liên hợp hàm đặc trưng có cùng một giá trị. Vậy hàm đặc trưng cũng có thể xem là trên tập hợp các lớp K_α các yếu tố liên hợp.

$K_\alpha = \left\{bab^{-1} \mid b \in G\right\}$

Ta viết

$\chi^{(\alpha)} = \chi^{(K_\alpha)}$.

Có một định lý thường dùng về hàm đặc trưng của các biểu diễn tối gian không tương đương của nhóm hữu hạn. Giả sử có nhóm hữu hạn G và ký hiệu $\chi^{(\alpha)}$(a) là các hàm đặc trưng của các biểu diễn tối giản không tương đương T($^{\alpha}$). Ta hãy coi N giá trị $\chi^{(\alpha)}$(a) là N thành phần của một vectơ trong không gian Euclide phức N chiều và định nghĩa tích vô hướng của hai hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}$ và $\chi^{(\beta)}$ như là tích vô hướng của hai vectơ chia cho N

$$\left(\chi^{(\alpha)},\chi^{(\beta)}\right)=\frac{1}{N}\sum_{a}\chi^{(\alpha)}(a)\chi^{(\beta)}(a) \qquad (37)$$

Định lý về tính trực giao chuẩn hóa của các hàm đặc trưng

Các hàm đặc trưng của các biểu diễn tối giản không tương đương với nhau $T^{(\alpha)}$ của nhóm hữu hạn G thỏa mãn điều kiện trực giao chuẩn hóa

$$\left(\chi^{(\alpha)},\chi^{(\beta)}\right)=\delta_{\alpha\beta} \qquad (38)$$

Định lý này có một số hệ quả thường được sử dụng. Giả sử có một nhóm hữu hạn *G* và ta đã biết tất cả các hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}(a)$ của tất cả các biểu diễn tối giản không tương đương với nhau $T^{(\alpha)}$ của nhóm này. Cho một biểu diễn *T* bất kỳ của nhóm *G* và giả sử rằng ta đã biết được hàm đặc trưng $\chi^{(\alpha)}$(a) của biễn *T*. Khi đó ta có thể xác định được ngay rằng biểu diễn *T* có chứa biểu diễn tối giản $T^{(\alpha)}$ hay không, và nếu có chứa tì chứa bao nhiêu lần. Thực vậy, theo Mệnh đề 2, nếu *T* chứa $T^{(\alpha)} n_\alpha$lần, thì

$$\chi(a)=\sum_a n_\alpha\chi^{(\alpha)}(a)$$

Lấy tích vô hướng cả hai vế của hệ thức này với hàm đặc trưng $\chi^{(\beta)}$(a) nào đó và dùng công thức (37), ta thu được

$$n_\beta=\left(\chi^{(\beta)},\chi\right).$$

Hệ quả 1

Cho $\chi^{(\alpha)}$ (a) là các hàm đặc trưng của các biểu diễn tối giản $T^{(\alpha)}$ của một nhóm hữu hạn G, T là một biểu diễn nào đó với hàm đặc trưng $\chi(a)$. Biểu diễn T chứa biến diễn T (α) một số lần bằng

$$n_\alpha=\left(\chi^{(\beta)},\chi\right).$$

Hãy xét tích vô hướng của hàm đặc trưng χcủa một biểu diễn tùy ý T với chính nó và gọi là đại lượng thu được là bình phương vô hướng của hàm đặc trưng. Từ Mệnh đề 2 và Định lý về tính trực giao chuẩn hóa của các hàm hàm đặc trưng suy ra rằng.

$(\chi,\chi) = \left(\sum_\alpha n_\alpha \chi^{(\alpha)}, \sum_\beta n_\beta \chi^{(\beta)}\right) = \sum_\alpha n_\alpha^2.$

Nếu *T* là một biểu diễn tối giản thì trong số các số nguyên n_α chỉ có một số khác không và bằng 1. Khi đó

$(\chi,\chi) = 1.$

Còn nếu *T* là một biểu diễn khả quy thì ít nhất có hai số n_α lớn hơn hoặc bằng 1.

Hệ quả 2

Nếu một biểu diễn của nhóm hữu hạn G là tối giản thì bình phương vô hướng của hàm đặc trưng của nó bằng 1, còn nếu biểu diễn là khả quy thì bình phương vô hướng của nó lớn hơn 1.