Nhóm SO(3) các phép quay không gian Euclide thực ba chiều

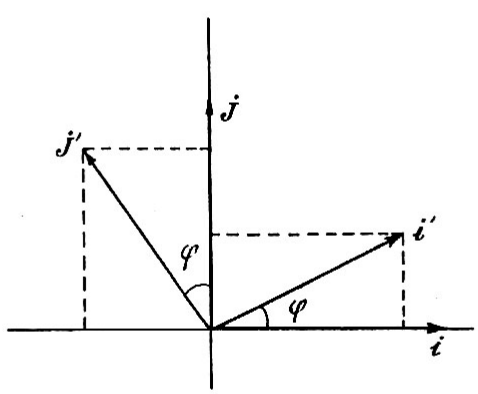
Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Trong mục này ta khảo sát chi tiết nhóm *SO*(3) các phép quay không gian Euclide thực ba chiều, vì đây là nhóm đối xứng rất thường gặp trong nhiều lĩnh vực vật lý lượng tử: vật lý nguyên tử, vật lý hạt nhân, vật lý hạt sơ cấp. Ta bắt đầu từ việc nghiên cứu các phép quay của mặt phẳng *xOy* quanh gốc tọa độ, tạo thành nhóm *SO*(2). Đó chính là nhóm quay không gian ba chiều quanh trục cố định *Oz*, một nhóm con của nhóm *SO*(3). Mỗi phép quay của mặt phẳng xOy được đặc trưng bởi góc quay φ và ký hiệu là $O(\varphi)$. Thực hiện liên tiếp hai phép quay các góc φ_1 và φ_2, ta được phép quay góc $\varphi_1 + \varphi_2$ là tích của hai phép quay nói trên

$$O(\varphi_1)\, O(\varphi_2) = O\,(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Tất cả các phép quay này giao hoán với nhau cho nên *SO*(2) là nhóm giao hoán. Mọi yếu tố $O(\varphi)$ của nhóm này đều hoàn toàn được xác định bởi giá trị của thông số φ thay đổi liên tục từ 0 đến 2 Π. Do đó *SO* (2) là nhóm liên tục một thông số. Trong phép quay $O(\varphi)$ các vectơ đơn vị cơ sở *i* và *j* chuyển thành vectơ đơn vị mới *i*’ và *j*’ liên hệ với *i* và *j* bởi các hệ thức (xem hình 1.1)



Hình 1.1

$i' = i \cos\varphi + j \sin\varphi$

$j' = -i \sin\varphi + j \cos\varphi$

Hai công thức này có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$(i' \, j') = (i \, j)\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận của phép biến đổi $O(\varphi)$ là

$$O(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Dễ dàng thử lại rằng $O(\varphi)$ là ma trận trực giao

$O(\varphi)^T O(\varphi) = O(\varphi) O(\varphi)^T = I$

có định mức bằng 1,

$\det O(\varphi) = 1$,

và thỏa mãn điều kiện

$O(\varphi_1)\, O(\varphi_2) = O(\varphi_1 + \varphi_2)$

Ma trận $O(\varphi)$ hoàn toàn xác định phép quay tương ứng. Vì các yếu tố ma trận của nó là các hàm khả vi của φ cho nên $O(\varphi)$ là nhóm Lie.

Trong phép quay $O(\varphi)$vectơ **r** với các thành phần x và y,

$r = xi + yj$,

chuyển thành vectơ r' với các thành phần x' và y',

$r' = x\, i' + y\, j'$.

Mặt khác, vì r', i', j' thu được từ r, i, j sau cùng một phép quay cho nên hệ thức giữa r' và i', j' có dạng giống hệt như hệ thức giữa r và i, j, cụ thể là

$r' = x\, i' + y\, j'$

Thay vào đây các biểu thức diễn tả *i* ’ và *j* ’ theo *i* và *j*, ta suy ra

$x' = \cos\varphi\, x - \sin\varphi y$

$y' = \sin\varphi x + \cos\varphi y$

Các công thức này còn được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Các phép quay mặt phẳng *xOy* xung quanh gốc tọa độ *O* đồng thời cũng là các phép quay của không gian ba chiều quanh trục *Oz*. Ký hiệu các vectơ đơn vị cơ sở của không gian Euclide ba chiều là *i*, *j*, *k*, phép quay góc φ quanh trục *Oz* là $Cz(\varphi)$. Phép quay này chuyển các vectơ đơn vị cơ sở nói trên thành các vectơ đơn vị cơ sở mới sau đây.

$i' = i\cos\varphi + j\sin\varphi,$

$j' = -i\cos\varphi + j\cos\varphi,$

$k' = k$

Do đó ma trận của phép quay $C_z(\varphi)$ có dạng

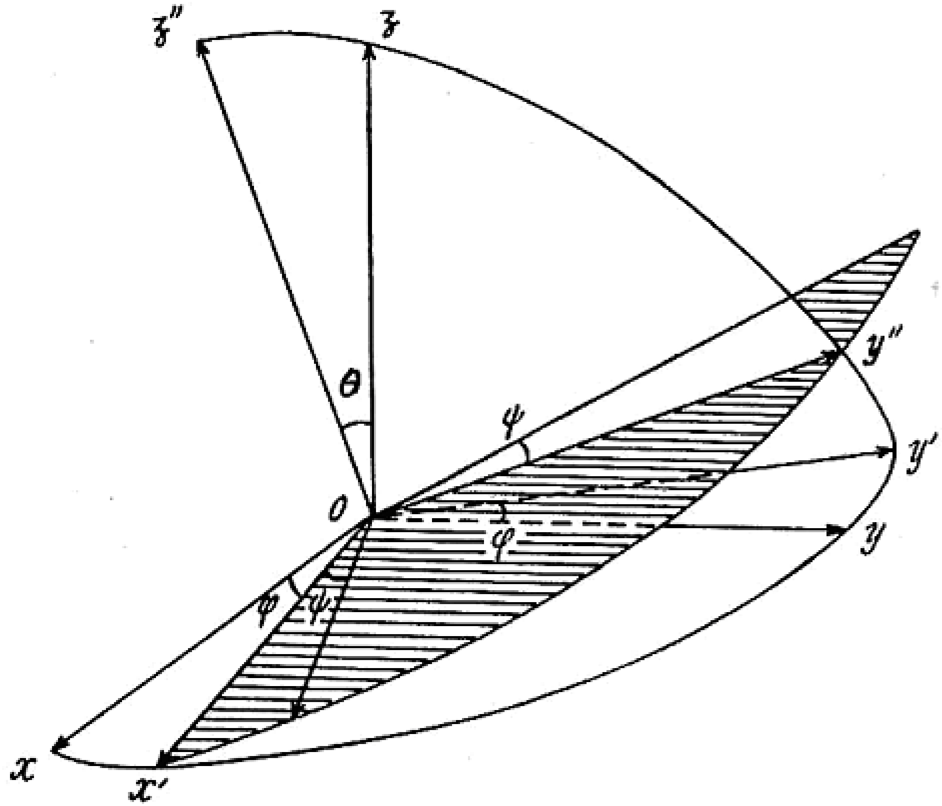
$$C_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự như vậy, ma trận của các phép quay góc φ quanh các trục *Ox* và *Oy*, ký hiệu là $C_z(\varphi)$ và $C_y(\varphi)$, có dạng

$$C_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$C_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Xét nhóm quay trong không gian ba chiều $SO(3)$. Mọi phép quay không gian ba chiều quanh gốc tọa độ O đều có thể được thực hiện dưới dạng tổ hợp của ba phép quay liên tiếp sau đây: phép quay góc φ quanh trục Oz chuyển các trục tọa độ Ox và Oy thành Ox' và Oy', phép quay góc θ quanh trục mới Ox' chuyển các trục mới Oy' và Ox thành Oy'' và Oz'', phép quay góc ψ quanh trục mới Oz'' (xem hình 1.2). Ba thông số φ, θ, ψ gọi là ba góc Euler. Ký hiệu phép quay với ba góc Euler.



Hình 1.2

φ, θ, ψ là $O(\psi, \theta, \varphi)$. Ma trận của phép quay này là tích của ba ma trận tương ứng với các phép quay quanh các trục Oz, Ox' và Oz'', cụ thể là

$O(\psi, \theta, \varphi) = Cz(\psi)\, Cx(\theta)\, Cz(\varphi)$.

Thay vào đây các biểu thức của $Cx(\varphi)$, $Cz(\psi)$ và $Cx(\theta)$, ta thu được

$O(\psi, \theta, \varphi) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Các góc ψ và φ thay đổi từ 0 đến 2 π, còn góc θ thay đổi từ 0 đến π. Nhóm *SO*(3) là nhóm Lie ba thông số.

Trong đoạn trước ta đã định nghĩa các yếu tố liên hợp. Bây giờ ta hãy chứng minh tính chất liên hợp của hai phép quay cùng một góc quanh hai trục khác nhau.

Mệnh đề . *Trong nhóm quay SO(3) hai phép quay cùng một góc quanh hai trục quay khác nhau luôn luôn liên hợp với nhau.*

Chứng minh. Ký hiệu các vectơ đơn vị cơ sở *i*, *j*, *k* của hệ tọa độ Descartes là e_i, $i = 1, 2, 3$ và giả sử *n* và *n*' là hai vectơ đơn vị có chung điểm đầu là gốc tọa độ *O*. Có một phép quay *R* nào đó chuyển vectơ *n* thành vectơ *n*' và giả sử rằng trong phép quay này các vectơ đơn vị cơ sở e_i chuyển thành e'_i. Các phép quay góc φ quanh các trục *n* và *n*' ký hiệu là $Cn(\varphi)$ và $Cn'(\varphi)$. Trong hệ tọa độ với các vectơ đơn vị cơ sở e'_i phép quay $Cn'(\varphi)$ có các yếu tố ma trận giống hệt như các yếu tố má trận của phép quay $Cn(\varphi)$ trong hệ tọa độ với các vectơ đơn vị cơ sở e_i. Nói khác đi, nếu

$$C_n(\varphi)\, e_i = e_j A_{ji}$$

thì

$$C_{n'}(\varphi)\, e_i' = e_j' A_{ji}$$

Thay

$$e'_i = R\, ei$$

vào hệ thức (4)

$$C_{n'}(\varphi)\, R\, e_i = Re_j A_{ji}$$

rồi nhân cả hai vế với R^{-1} từ bên trái, ta thu được

$$R^{-1}Cn'(\varphi)\, Re_i = e_j A_{ji}$$

So sánh với hệ thức (3), ta suy ra rằng

$$R^{-1}C_{n'}(\varphi)\, R = C_n(\varphi)$$

hay là

$C_{n'}(\varphi) = RC_n(\varphi)R^{-1}$

Ta còn viết lại hệ thức này như sau

$C_{Rn}(\varphi) = RC_n(\varphi)R^{-1}$

Vậy $C_{Rn}(\varphi)$ và $C_n(\varphi)$ là hai yếu tố liên hợp với nhau của nhóm $SO(3)$.

Bây giờ bằng những lập luận tổng quát chúng ta hãy thiết lập biểu thức của phép quay $C_n(\delta\varphi)$ một góc vô cùng bé $\delta\varphi$ quanh trục quay hướng theo vectơ đơn vị n trong phép gần đúng cấp 1 theo $\delta\varphi$. Ta hãy đặc trưng phép quay góc $\delta\varphi$ quanh trục quay hướng theo vectơ n bằng vectơ $\delta\varphi$ có giá trị bằng $\delta\varphi$ và hướng theo trục quay,

$\delta\varphi = n\delta\varphi.$

Ma trận $C_n(\delta\varphi)$ phải quy về ma trận đơn vị I khi đặt $\delta\varphi = 0$, cho nên nó có dạng

$C_n(\delta\varphi) = I + X(\delta\varphi)$

Trong đó ma trận $X(\delta\varphi)$ là đại lượng bé cấp 1 theo $\delta\varphi$. Bỏ qua số hạng cấp 2, ta có

$$[C_n(\delta\varphi)]^{-1} = I - X(\delta\varphi)$$

Mặt khác

$$[C_n(\delta\varphi)]^T = I + [X(\delta\varphi)]^T$$

Từ điều kiện ma trận $C_n(\delta\varphi)$ là ma trận trực giao

$$[C_n(\delta\varphi)]^T = [C_n(\delta\varphi)]^{-1}$$

suy ra rằng ma trận $X(\delta\varphi)$ phải là ma trận phản đối xứng

$$[X(\delta\varphi)]^T = -X(\delta\varphi)^{\mathrm{T}}$$

Ta thấy rằng trong số chín yếu tố ma trận của $X(\delta\varphi)$ thì ba yếu tố chéo phải bằng không

$$[X(\delta\varphi)]_{ii} = 0$$

sáu yếu tố không nằm trên đường chéo chia thành ba cặp, mỗi cặp gồm hai yếu tố bằng nhau về độ lớn và ngược dấu nhau,

$[X(\delta\varphi)]_{ij} = -[X(\delta\varphi)]_{ji}, i \neq j$

Vậy ma trận X(δφ) chỉ chứa ba thông số độc lập. Ta có thể chọn ba thàn phần $\delta\varphi_k$, k = 1, 2, 3, của vectơ δφ làm ba thông số độc lập này và viết

$$X(\delta\varphi) = -i\,\delta\varphi\,S = -i\,\delta\varphi_k\,S_k$$

trong đó S_k, k = 1, 2, 3, là ba ma trận phản đối xứng 3 x 3 độc lập tuyến tính với nhau. Ta đưa them đơn vị ảo $-i$ vào công thức vừa viết để cho thuận tiện sau này. Vì các yếu tố ma trậ của X($\delta\varphi$) phải là các số thực cho nên các yếu tố ma trận của các ma trận S_k phải là các số ảo.

Từ các biểu thức vừa viết ở trên của C_n (δφ) và X (δφ) suy ra rằng các phép quay góc vô cùng bé $\delta\varphi$ quanh các trục Ox, Oy, và Oz có các ma trận sau đây

$$C_x(\delta\varphi) = I - i\,\delta\varphi\,S_1$$

$$C_y(\delta\varphi) = I - i\,\delta\varphi\,S_2$$

$$C_z(\delta\varphi) = I - i\,\delta\varphi\,S_3$$

Các ma trận Sk, k = 1, 2, 3, gọi là các vi tử của các phép quay quanh ba trục tọa độ. Ta lại cũng đã biết các biểu thức (1a) - (1c) của các phép quay C_x(φ), C_y(φ), C_z(φ) với các góc quay φ bất kỳ. Dùng các biểu thức này rồi thay φ bằng $\delta\varphi$ vô cùng bé và chỉ giữ lại các số hạng cấp 1 theo $\delta\varphi$, ta suy ra

$$C_x(\delta\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\varphi \\ 0 & \delta\varphi & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y(\delta\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_z(\delta\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\varphi & 0 \\ \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

So sánh các biểu thức này với các công thức biểu diễn các ma trận $C_x(\delta\varphi)$, $C_y(\delta\varphi)$ và $C_z(\delta\varphi)$ qua các vi tử S_1, S_2, S_3 mà ta đã viết ở trên, ta thu được

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dễ thử lại rằng ba ma trận S_1, S_2, S_3 thỏa mãn các hệ thức giao hoán sau đây

$[S_1,S_2]= i\,S_3$, $[S_2,S_3]= i\,S_1$, $[S_3,S_1]= i\,S_2$

hay là dưới dạng thu gọn

$[S_i,S_j]= i\,\varepsilon_{ijk}\,S_k$,

Trong đó ε_{ijk} là tenxơ hoàn toàn phản đối xứng hạng 3 trong không gian ba chiều, với

$\varepsilon_{123} = 1$