Khái niệm về biểu diễn nhóm

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Định nghĩa biểu diễn nhóm

Cho một nhóm *G* gồm các yếu tố *e*, *a*, *b*, *c*,… mà bản chất là tùy ý và một nhóm *T* các phép biến đổi tuyến tính trong một không gian vectơ *L*. Ta gọi nhóm *T* các phép biến đổi trong không gian *L* là một biểu diễn của nhóm G nếu có một phép đồng cấu của nhóm *G* lên nhóm *T*, nghĩa là nếu ứng với mỗi yếu tố a, b, c,… của nhóm G có phép biến đổi *T*(*a*), *T*(*b*), *T*(*c*),… trong nhóm *T* mà sự tương ứng này bảo toàn phép nhân nhóm:

$$\left.\begin{matrix} a \to T(a), \\ b \to T(b), \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab \to T(a)T(b), \forall a, b \in G, T(a), T(b) \in T$$

Ta nói có một biểu diễn của nhóm *G* trong không gian *L* và không gian *L* thực hiện biểu diễn *T* của nhóm *G*. Thứ nguyên của không gian *L* gọi là thứ nguyên của biểu diễn *T*. Ma trận của các phép biến đổi *T*(*a*) đối với một hệ cơ sở nào đó trong không gian *L* cũng được ký hiệu là *T*(*a*). Từ định nghĩa suy ra các tính chất sau đây.

1) Ứng với yếu tố đơn vị e của nhóm *G* là phép biến đổi đồng nhất *I* trong khong gian *L*:

$T(e) = I.$

Thực vậy, ta có

$$\left.\begin{matrix} a \to T(a), \\ e \to T(e), \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} T(ae) = T(a)T(e), \\ T(ea) = T(e)T(a), \end{matrix}\right.$$

Với ∀ lacks bvar *a* in: 2 args. *G*. Nhưng $ae = ea = a$, do đó

$T(ae) = T(ea) = T(a).$

Vậy

$T(a), T(e) = T(e), T(a) = T(a),$

biến đổi $T(e)$ phải là yếu tố đơn vị trong nhóm T.

2) Biến đổi $T(a^{-1})$ ứng với yếu tố nghịch đảo a^{-1} của a là nghịch đảo của biến đổi $T(a)$ ứng với yếu tố a:

$T(a^{-1}) = [T(a)]^{-1}$.

Thực vậy,

$$\left.\begin{array}{l} a \to T(a), \\ a^{-1} \to T(a^{-1}), \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T(aa^{-1}) = T(a)T(a^{-1}), \\ T(a^{-1}a) = T(a^{-1})T(a), \end{cases}$$

Với $\forall$ $a$in: 2 args.G. Nhưng $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, do đó

$T(a)\, T(a^{-1}) = T(a^{-1})\, T(a) = T(e) = \mathrm{I}$

Vậy biến đổi $T(a^{-1})$ phải là nghịch đảo $[T(a)]^{-1}$ của $T(a)$.

Ta biết rằng nhóm $SU(2)$ đồng cấu với nhóm $SO(3)$. Ta thấy các biến đổi của nhóm $SO(3)$ tạo thành biểu diễn của nhóm $SU(2)$. Trong vật lý người ta mở rộng khái niệm biểu diễn và còn coi nhóm $SU(2)$ là biểu diễn của nhóm quay $SO(3)$. Trong trường hợp này ứng với một yếu tố của nhóm $SO(3)$ có hai biến đổi khác nhau thuộc nhóm $SU(2)$. Ta nói rằng nhóm $SU(2)$ là biểu diễn lưỡng trị của nhóm $SO(3)$.

Mỗi nhóm đều có nhiều biểu diễn, trong đó có những biểu diễn tương đương với nhau theo định nghĩa sau đây.

Định nghĩa biểu diễn tương đương

Cho hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ của cùng một nhóm G trên hai không gian vectơ L_1 và L_2. Hai biểu diễn này được gọi là tương đương với nhau nếu giữa hai không gian vectơ L_1 và L_2 có một phép ánh xạ tuyến tính đơn giá theo cả hai chiều

$X : L_1 \to L_2$,

$X^{-1} : L_2 \to L_1$

(ứng với một vectơ của L_1 có một vectơ của L_2 và ứng với một vectơ của L_2 có một vectơ của L_1) mà với mọi yếu tố a của nhóm G hai phép biến đổi tuyến tính của $T^{(1)}(a)$ và$T^{(2)}(a)$ liên hệ với nhau bởi công thức

$T^{(2)}(a) = X\, T^{(1)}(a)\, X^{-1},\ \forall\, a \in G$ (1)

Các biểu diễn tương đương có một sự giống nhau sâu sắc được diễn tả trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề

Nếu T (1) và T (2) là hai biểu diễn tương đương thì ta có thể chọn hai vectơ cơ sở trong hai không gian vectơ L 1 và L 2 thực hiện hai biểu diễn này thế nào để các yếu tố ma trận của các phép biến đổi T (1) (a) và T (2) (a) hoàn toàn trùng nhau với mọi a G.

Do đó khi nghiên cứu biểu diễn nhóm ta không phân biệt các biểu diễn tương đương với nhau và coi tất cả các biểu diễn tương đương với nhau chỉ là một biểu diễn.

Không gian L thực hiện biểu diễn T của nhóm G có thể quá lớn và bao gồm một không gian con bất biến L_1 theo nghĩa sau đây. Tất cả các phép biến đổi $T(a)$ với mọi aG khi tác dụng lên một vectơ bất kỳ của L_1 đều cho kết quả là các vectơ hoàn toàn nằm trong L_1:

$\forall\ aG, \forall\ r_1L_1 : T(a)r_1L_1$

Khi đó các phép biến đổi $T(a)$ đều có thể được xem là các phép biến đổi $T_1(a)$ của không gian L_1

$T_1(a)\ r_1$ đn $T(a)r_1, \forall\ r_1L_1.$

Các phép biến đổi $T_1(a)$ ứng với tất cả các yếu tố a của nhóm G tạo thành biểu diễn T_1 của nhóm này trong không gian L_1. Ta nói rằng trên không gian con bất biến L_1 biểu diễn T quy về biểu diễn T_1, và có định nghĩa sau đây,

Định nghĩa biểu diễn khả quy và biểu diễn tối giản

Cho một biểu diễn T của nhóm G trong không gian vectơ L. Nếu trong L có một không gian con L_1 bất biến đối với tất cả các phép biến đổi $T(a)$ của biểu diễn T, với mọi yếu tố a của nhóm G, thì ta nói rằng T là một biểu diễn khả quy. Trong trường hợp ngược lại nếu trong không gian L không có một không gian con nào bất biến đối với tất cả các phép biến đổi với tất cả các phép biến đổi $T(a)$, trừ hai không gian con tầm thường là chính không gian L và không gian con bằng không, thì ta nói rằng T là biểu diễn tối giản.

Xét biểu diễn khả quy T trong không gian n chiều L, trong đó có không gian con bất biến m chiều L_1, $m < n$. Không gian L là tổng của không gian con L_1 và một không gian con $(n - m)$ chiều L_2 nào đó.

$L = L_1 + L_2$

Không gian con L_2 có thể không phải là không gian con bất biến, mà cũng có thể là không gian con bất biến. Gọi e_1, e_2, …, e_n là hệ vectơ cơ sở trong L_1, và e_{m+1}, e_{m+2}, …, e_n là hệ vectơ cơ sở trong L_2. Ta hãy chọn các vectơ này làm hệ vectơ cơ sở trong L và xét tác dụng của các phép biến đổi $T(a)$ lên các vectơ đó. Ký hiệu các yếu tố ma trận là $T_{ij}(a)$, ta có

$$T(a)e_i = e_j T_{ji}(a) \qquad (2)$$

Với i m tất cả các vectơ $T(a)e_i$ đều nằm trong L_1, do đó trong vế phải công thức (2) vừa viết ở trên chỉ có thể có các vectơ e_j với j m. Vậy

$T_{ji}(a) = 0$ nếu jm và $j > m$,

nghĩa là các ma trận $T(a)$ của biểu diễn khả quy đang xét phải có dạng sau đây:

$$T(a) = \begin{pmatrix} T_{11}(a) & \cdots & T_{1m}(a) & T_{1\,m+1}(a) & \cdots & T_{1n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m1}(a) & \cdots & T_{mm}(a) & T_{m\,m+1}(a) & \cdots & T_{mn}(a) \\ & & & T_{m+1\,m+1}(a) & \cdots & T_{m+1\,n}(a) \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & T_{m+1\,n}(a) & \cdots & T_{nn}(a) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Tất cả các yếu tố ma trận nằm trong ô bên trái phía dưới phải bằng không.

Giả sử rằng không gian con L_2 lại cũng là không gian con bất biến. Khi đó, với mọi e_i mà $i > m$, tất cả các vectơ $T(a)e_i$ đều nằm trong L_2 và do đó biểu thức khai triển của vectơ này theo e_j không thể chứa các vectơ e_j với $j \le m$. Vậy

$T_{ji}(a) = 0$ Nếu $i > m$ và jm,

nghĩa là các ma trận $T(a)$ bây giờ có dạng

$$T(a) = \begin{pmatrix} T_{11}(a) & \cdots & T_{1m}(a) & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ T_{m1}(a) & \cdots & T_{mm}(a) & & & \\ & & & T_{m+1\,m+1}(a) & \cdots & T_{m+1\,n}(a) \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & T_{m+1\,n}(a) & \cdots & T_{nn}(a) \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Trên hai không gian con bất biến L_1 và L_2 biểu diễn T quy về hai biểu diễn $T^{(1)}$ và $T^{(2)}$ gồm các phép biến đổi hoàn toàn độc lập với nhau. Nếu các biểu diễn này hoặc một trong hai biểu diễn này là khả quy, nghĩ là cả L_1 lẫn L_2 hoặc một không gian con trong số hai không gian này lại chứa không gian con bất biến, thì ta lặp lại các lập luận ở trên. Nếu lần nào không gian thực hiện biểu diễn khả quy cũng tách thành hai không gian con bất biến như vừa trình bày ở trên, thì cứ tiếp tục tách các không gian con cho đến khi không thể tách được nữa ta sẽ đi đến kết quả cuối cùng sau đây: Không gian vectơ L tách thành các không gian con bất biến L_1, L_2, …, L_f mà trên mỗi không gian con L_i này biểu diễn T quy về một biểu diễn tối giản $T^{(i)}$. Ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa biểu diễn hoàn toàn khả quy

Biểu diễn T của nhóm G trong không gian vectơ L được gọi là hoàn toàn quy nếu L là tổng của các không gian con bát biến L_1, L_2, …, L_f mà trên mỗi không gian con L_i này biểu diễn T quy về một biểu diễn tối giản $T^{(i)}$.

Ma trận của các biến đổi $T(a)$ của một biểu diễn hoàn toàn khả quy có dạng tổng quát sau đây, gọi là dạng chéo ô,

$$T(a)=\begin{pmatrix} T^{(1)}(a) & & & & & & \\ & T^{(2)}(a) & & & \mathbf{0} & & \\ & & T^{(3)}(a) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & T^{(f-2)}(a) & & \\ & \mathbf{0} & & & & T^{(f-1)}(a) & \\ & & & & & & T^{(f)}(a) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

trong đó các ô chéo là các ma trận của các biểu diễn tối giản, còn tất cả các ô không chéo đều có các yếu tố ma trận bằng không.

Giả sử không gian vectơ L thực hiện biểu diễn T của nhóm G là một không gian Euclide phức mà trên đó ta có định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ là dạng song tuyến tính xác định dương của các thành phần của cac vectơ này (tuyến tính đối với một vectơ và phản tuyến tính đối với vectơ kia). Biết tích vô hướng của hai vectơ bát kỳ, ta có thể định nghĩa hai vectơ trực giao với nhau. Cho một không gian con L_1 của L. Tất cả các vectơ trong L trực giao với L_1 tạo thành khong gian con L_2 gọi là phần phụ trực giao của L_1. Không gian L là tổng của L_1 và L_2. Ta viết $L = L_1 \oplus L_2$. Biết tích vô hướng của hai vectơ bất kỳ, ta còn có thể định nghĩa toán tử unita là toán tử thực hiện phép biến đổi tuyến tính bảo toàn tích vô hướng của tất cả các vectơ. Có được các toán tử unita, bây giờ ta có thể định nghĩa biểu diễn unita.

Định nghĩa biểu diễn unita

Biểu diễn T của nhóm G trong không gian Euclide phức L gọi là biểu diễn unita nếu với tất cả các yếu tố a của nhóm G tất cả các phép biến đổi $T(a)$ đều là các toán tử unita:

$[T(a)]^{+} = [T(a)]^{-1}$, $\forall$ $a$in: 2 args.G.

Các biểu diễn unita có các tính chất đặc biệt sau đây.

1. Trong không gian L thực hiện biểu diễn unita T của nhóm G phần phụ trực giao L 2 của mọi không gian con bất biến L 1

$T(a)\ L_1 L_1$, $\forall$ $a$in: 2 args.G.

$L = L_1 \oplus L_2$,

cũng là một không gian bất biến,

$T(a)\ L_2 L_2$, $\forall$ $a$in: 2 args.G,

2. Mọi biểu diễn unita khả quy đều hoàn toàn khả quy.

Có thể chứng minh được rằng mọi biểu diễn của một nhóm hữu hạn đều tương đương với một biểu diễn unita. Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét các biểu diễn unita cho nên khi không thật cần thiết thì ta không nhắc đến từ unita nữa.

Biểu diễn của nhóm Lie

Xét trường hợp G là một nhóm Lie mà mỗi yếu tố a của nó được xác định bởi n tham số độc lập $\alpha_j$có thể nhận những giá trị thực thay đổi liên tục, yếu tố đơn vị là yếu tố mà tất cả các tham số $\alpha_j$có giá trị bằng không. Xét một biểu diễn T của nhóm Lie này trong không gian vectơ L. Ứng với yếu tố cả nhóm mà các tham số độc lập có các giá trị α_j ta có một toán tử $T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ mà các yếu tố ma trận đối với một hệ vectơ cơ sở bất kỳ trong không gian L là các hàm khả vi cả các tham số $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$. Khi tất cả các tham số bằng không thì toán tử $T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ là hoán tử đơn vị:

$T(0, 0, \ldots, 0) = I$.

Xét các toán tử $T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ ứng với cá giá trị vô cùng bé của các tham số độc lập α_j. Chỉ giữ lại các số hạng cấp một và bỏ qua các số hạng cấp cao hơn, ta có thể viết

$$T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) \approx I + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0} \alpha_j.$$

Đặt

$$T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) \approx I - i\sum_{j=1}^{n} a_j X_j \qquad (6)$$

Các toán tử

$$X_j = i\frac{\partial T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)}{\partial \alpha_j}\Big|_{\alpha_1=...=\alpha_s=0}, j = 1, 2, …, s \qquad (7)$$

được gọi là các vi tử của biểu diễn *T* của nhóm Lie *G* trong không gian *L*.

Biểu diễn nhóm Lie và biểu diễn đại số Lie

Cho một nhóm Lie G các phép biến đổi tuyến tính $T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ phụ thuộc s tham số độc lập $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$của một không gian vectơ *V* và giả sử có một biểu diễn của nhóm này trong không gian vectơ *V'*, nghĩa là có một nhóm Lie *G'* các phép biến đổi $T'(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ của không gian *V'* và một phép đồng cấu của *G* lên *G'*.

$T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) \rightarrow T'(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$

Ký hiệu Xivà $X_i^{'}$, i = 1, 2, …, s là các vi tử của các nhóm biến đổi *G* và *G'*. Phép đồng cấu của *G* lên *G'* kéo theo phép ánh xạ đại số Lie các vi tử Xi lên đại số Lie các vi tử $X_i^{'}$,

$Xi \rightarrow X_i^{'}, i = 1, 2, …, s$

mà ứng với một vi tử $X_i^{'}$ chỉ có một vi tử duy nhất Xicó ảnh là $X_i^{'}$. Xét yếu tố

$$T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\, T(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)\, T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)^{-1}\, T(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)^{-1} \qquad (8)$$

của nhóm *G*. Trong phép đồng cấu của *G* lên *G'* yếu tố này có ảnh là yếu tố

$$T'(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\, T'(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)\, T'(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)^{-1}\, T'(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)^{-1} \qquad (9)$$

Vì hai yếu tố (8) và (9) biểu diễn giống như nhau qua các giao hoán tử $[X_i,X_j]$ và $[X_i^{'},X_j^{'}]$, theo thứ tự, cho nên gio hóa tử $[X_i,X_j]$ có ảnh là giao hoán tử $[X_i^{'},X_j^{'}]$:

$$[X_i,X_j] \rightarrow [X_i^{'},X_j^{'}] \qquad (10)$$

Vậy phép đồng cấu của nhóm *G* lên nhóm *G'* có hệ quả là phép đẳng cấu giữa đại số Lie các vi tử *Xi* của nhóm *G* và đại số Lie các vi tử $[X'_i, X'_j]$ của nhóm *G'*. Áp dụng sự đẳng cấu này cho trường hợp mọi nhóm Lie các phép biến đổi và mọi biểu diễn của nó ta có thể nói rằng đại số Lie các vi tử của một biểu diễn của nhóm Lie *G* các phép biến đổi của một không gian vectơ đẳng cấu với đại số Lie của chính nhóm *G*.

Các định lý về biểu diễn tối giản

Các biểu diễn tối giản có tính chất sau đây.

Bổ đề Shur

Nếu trong không gian L thực hiện biểu diễn tối giản T của nhóm G có một toán tử A khác không và giao hoán với tất cả các toán tử T(a)của biểu diễn T, a G , thì toán tử A phải là bội của toán tử đơn vị

$A = \alpha \cdot I$

Trong trường hợp G là một nhóm Lie, T là một biểu diễn với các vi tử X i ,i=1,2,…,s,

Bổ đề Shur đối với nhóm Lie

Nếu trong không gian L thực hiện biểu diễn tối giản T của nhóm G có một toán tử A khác không và giao hoán với tất cả cá toán tử A khác không và giao hoán với tấ cả các vi tử X i , i = 1, 2, …, s của biểu diễn T, thì toán tử A phải là bội của toán tử đơn vị

$A = \alpha \quad I .$

Cuối cùng ta dẫn ra ở đây hai định lý về biểu diễn nhóm hữu hạn thường được sử dụng trong vật lý.

Giả sử nhóm hữu hạn *G* cấp *N* chia làm *Nk* lớp các yếu tố liên hợp. Ta có định lý sau đây.

Định lý về số các biểu diễn tối giản không tương đương

Số f các biểu diễn tối giản không tương đương với nhau của một nhóm hữu hạn G bằng số N k lớp các yếu tố liên hợp của nhóm này.

$f = N_k$

Giả sử nhóm hữu hạn G cấp N có f biểu diễn tối giản không tương đương vơi nhau $T^{(\alpha)}$, biểu diễn $T^{(\alpha)}$ có thứ nguyên d_α. Các giá trị d_α phải tuân theo định lý sau đây.

Định lý về thứ nguyên của các biểu diễn tối giản không tương đương

Các thứ nguyên d α của tất cả các biểu diễn tối giản không tương đương của một nhóm hữu hạn G cấp N phải thỏa mãn hệ thức.

$$\sum_{\alpha=1}^{f} d_\alpha^2 = N$$