Khái niệm về nhóm

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Định nghĩa nhóm

Tập hợp *G* các yếu tố *a, b, c,…* được gọi là một nhóm nếu có các tính chất sau đây:

1) Trên tập hợp *G* tồn tại một phép tính gọi là phép nhân của nhóm. Phép tính này đặt tương ứng với mỗi cặp hai yếu tố *a* và *b* bất kỳ của tập hợp *G* một yếu tố *c* cũng thuộc tập hợp này, gọi là tích của *a* và *ba* và ký hiệu là *ab* :

$a \in G, b \in G$

tendsto: 2 args.ab = $c \in G$

2) Phép nhân của nhóm có tính chất kết hợp, nghĩa là với mọi yếu tố *a, b, c* của tập hợp *G* ta luôn có

$(ab)\, c = a\, (bc)$

3) Trân tập hợp G tồn tại một yếu tố *e*, gọi là yếu tố đơn vị, mà với mọi yếu tố $a \in G$ ta luôn luôn có

$e\, a = a\, e = a$

4) Với mọi yếu tố $a \in G$ bao giờ cũng có một yếu tố $\left(a^{-1}\right) \in G$, gọi là nghịch đảo của *a*, sao cho

$a^{-1} a = a\, a^{-1} = e$

Do tính chất kết hợp của phép nhân ta có thể viết

$$\underbrace{a\,a \ldots a}_{\text{n lần}} = a^{n}$$

Các định nghĩa khác

Nếu phép nhân của nhóm G có tính chất giao hoán, nghĩa là với mọi cặp yếu tố $a \in G$, $b \in G$ ta luôn luôn có hệ thức $a\, b = b\, a$,

thì nhóm G được gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel.

Nếu nhóm G chỉ có một số hữu hạn các yếu tố khác nhau thì nhóm này được gọi là nhóm hữu hạn, còn số lượng các yếu tố khác nhau được gọi là cấp của nhóm. Trong trường hợp ngược lại, khi nhóm G có vô số yếu tố khác nhau, nó được gọi là nhóm vô hạn.

Với các nhóm hữu hạn ta có thể trình bày quy tắc phân nhóm một cách cụ thể dưới dạng một bảng nhân nhóm được thiết lập như sau. Ta kẻ một bảng vuông với số hằng và số cột bằng số yếu tố của nhóm. Ở phía trái của bảng, đầu mỗi hang, và ở trên của bảng, đầu mỗi cột, ta ghi tất cả các yếu tố khác nhau của nhóm theo một thứ tự nào đó $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Sau đó trên ô chung của hang thứ j và cột thứ j ta ghi yếu tố là tích $g_j g_i$. Nhìn bảng phân nhóm ta thấy ngay quy tắc nhân nhóm đối với từng cặp yếu tố.

Bảng nhân nhóm

	g_1	g_2	g_3	g_4			g_i		g_n
g_1	g_1g_1	g_1g_2	g_1g_3	g_1g_4			g_1g_i		g_1g_n
g_2	g_2g_1	g_2g_2	g_2g_3	g_2g_4			g_2g_i		g_2g_n
g_3									
g_j	g_jg_1	g_jg_2	g_jg_3	g_jg_4			g_ng_i		g_jg_n
g_n	g_ng_1	g_ng_2	g_ng_3	g_ng_4			g_ng_j		g_ng_n

Nếu trong nhóm G có một tập hợp các yếu tố $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với tính chất sau đây: mọi yếu tố của nhóm G đều có thể viết dưới dạng một tích mà mỗi thừa số là một trong các yếu tố này (một yếu tố có thể được dùng làm thừa số nhiều lần), thì ta nói rằng nhóm G

được sinh ra bởi các yếu tố $a_1, a_2, ..., a_n$, còn các yếu tố này được gọi là các yếu tố sinh. Nhóm hữu hạn được sinh ra bởi một yếu tố a, nghĩa là gồm các yếu tố có dạng $a, a^2, ..., a^n = e$, được gọi là nhóm vòng.

Nếu mọi yếu tố của nhóm *G* đều là một hàm liên tục của những thông số nào đó và hoàn toàn được xác định bởi giá trị của những thông số này, thì nhóm *G* gọi là nhóm liên tục. Ta quy ước rằng các thông số này là các biến số độc lập. Nếu mọi yếu tố của nhóm liên tục *G* đều là hàm khả vi của các thông số độc lập, thì nhóm *G* được gọi là nhóm Lie.

Từ định nghĩa nhóm phát biểu ở trên suy ra ngay một số mệnh đề sau đây.

1. *Mỗi nhóm chỉ có một yếu tố đơn vị.*

2. *Nghịch đảo của tích của hai yếu tố bằng tích các nghịch đảo của chúng theo thứ tự ngược lại, nghĩa là*

$(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$

3. *Mỗi yếu tố của nhóm chỉ có một yêu tố nghịch đảo.*

Định nghĩa yếu tố liên hợp

Yếu tố a của nhóm G được gọi là liên hợp với yếu tố b của nhóm này nếu có một yếu tố nào đó c G mà

$a\,c\,a^{-1} = b$

Có thể chứng minh được rằng quan hệ liên hợp là một quan hệ tương đương, nghĩa là

1^{o}) *Nếu a liên hợp với b thì b liên hợp với a (tính chất đối xứng).*

2^{o}) *Yếu tố a liên hợp với chính nó (tính tự liên hợp).*

3^{o}) *Nếu a liên hợp với b, b liên hợp với c thì a liên hợp với a (tính chuyển tiếp).*

Lớp các yếu tố liên hợp

Vì rằng mối quan hệ liên hợp là một quan hệ tương đương cho nên tất cả các yếu tố của nhóm *G* liên hợp với một yếu tố xác định nào đó đều liên hợp với nhau, và do đó ta có thể chia nhóm *G* thành các tập hợp con mà tất cả các yếu tố trong mỗi tập hợp con đều liên hợp với nhau. Mỗi tập hợp con các yếu tố liên hợp với nhau của nhóm *G* được gội là một lớp các yếu tố liên hợp. Chú ý rằng hai lớp khác nhau không có một yếu tố chung nào cả, nghĩ là không giao nhau.

Định nghĩa nhóm con

Một tập hợp con G_1 của nhóm G được gọi là nhóm con của nhóm G nếu đối với phép nhân của nhóm G tập hợp G_1 này cũng tạo thành một nhóm, nghĩa là nếu G_1 thỏa mãn những điều kiện sau đây:

1) Nếu a và b là hai yếu tố của G_1 thì tích ab cũng là một yếu tố của G_1:

$a \in G_1$,$b \in G_1$implies: 2 args. a b $\in G_1$

Ta nói rằng tập hợp con G_1 là kín đối với phép nhân nhóm:

$G_1 G_1 \ G_1$

2) Tập hợp con *G1* chứa yếu tố đơn vị *e* của nhóm *G*:

$e \in G_1$

3) Nếu a là một yếu tố của G_1 thì a^{-1} cũng là một yếu tố của G_1:

$a \in G_1 \qquad a^{-1}$ in: 2 args.G_1

Ta nói rằng tập hợp G_1 là kín đối với phép nghịch đảo:

$G^{-1}{}_1 \ G_1$

Dễ thấy rằng từ các điều kiện 1) và 3) suy ngay ra điều kiện 2). Thực vậy, lấy một yếu tố tùy ý a của tập hợp con G_1. Theo điều kiện 3) ta có

$a \in G_1 \Rightarrow a^{-1}$ in: 2 args. G_1

Theo điều kiện 1) thì

$a \in G_1$, a^{-1} in: 2 args. $G_1 \Rightarrow e = a\, a^{-1}$ in: 2 args. G_1

Đó là điều kiện 2). Chú ý rằng phép nhân của nhóm con *G1* chắc chắn có tính chất kết hợp, vì đó là phép nhân của nhóm *G*.

$\Rightarrow$

Định nghĩa tích trực tiếp của hai nhóm

Cho hai nhóm *G1* và *G2* hoàn toàn độc lập với nhau, với các yếu tố $a_1, b_1, c_1, \ldots$ G_1 và $a_2, b_2, c_2, \ldots$ G_2. Xét tập hợp $G_1 \otimes G_2$ mà mỗi yếu tố là một cặp $\{a_1,a_2\}$, $\{b_1,b_2\}$, $\{c_1,c_2\}$, … gồm hai yếu tố của hai nhóm. Ta định nghĩa tích của hai yếu tố của $G_1 \otimes G_2$ như nhau:

$$\{a_1,a_2\}\{b_1,b_2\} = \{a_1b_1,a_2b_2\}$$

Gọi e_1 và e_2 là hai yếu tố đơn vị của G_1 và G_2, a_1^{-1} và a_2^{-1} là hai yếu tố nghịch đảo của a_1 và a_2 trong G_1 và G_2. Ta coi là yếu tố đơn vị của $G_1 \otimes G_2$, $\{a_1^{-1}$ và $a_2^{1}\}$ là yếu tố nghịch đảo của $\{a_1, a_2\}$trong $G_1 \otimes G_2$. Tập hợp $G_1 \otimes G_2$ với phép nhân nhóm, với yếu tố đơn vị và yếu tố nghịch đảo định nghĩa như vậy tạo thành một nhóm, gọi là tích trực tiếp $G_1 \otimes G_2$ của hai nhóm đã cho. Tính chất kết hợp của phép nhân trên $G_1 \otimes G_2$ suy ra từ tính chất kết hợp của phép nhân trên từng nhóm G_1 và G_2.

Có những nhóm mà các yếu tố có bản chất khác nhau nhưng các phép tính toán dưới dóc độ là các yếu tố của nhóm thì lại tương tự nhau. Sự tương tự đó được phát biểu như sau.

Định nghĩa sự đồng cấu và sự đẳng cấu

Nhóm G_1 gọi là đồng cấu với nhóm G_2 nếu có một phép tương ứng giữa các yếu tố $a_1, b_1, c_1\ldots$ của G_1 với các yếu tố $a_2, b_2, c_2\ldots$ của G_2,

$$G_1 \ni a_1 \to a_2 \in G_2,$$

Sao cho ứng với mỗi yếu tố a_1 in: 2 args. G_1 có một yếu tố duy nhất a_2 in: 2 args. G_2 gọi là ảnh hưởng của a_1 trong G_2, mỗi yếu tố a_2 in: 2 args. G_2 là ảnh hưởng của ít nhất một yếu tố a_1 in: 2 args. G_1, và phép tương ứng này bảo toàn phép nhân nhóm, nghĩa là nếu tương ứng với *a1* in: 2 args. G_1 có a_2 in: 2 args. G_2, tương ứng b_1 in: 2 args. G_1 có b_2 in: 2 args. G_2 , thì tương ứng có a_1b_1 in: 2 args. G_1 , có a_2b_2 in: 2 args. G_2 :

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{a}_1 \to \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{b}_1 \to \mathrm{b}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1b_1 \to a_2b_2$$

Nếu sự tương ứng nói trên là duy nhất theo cả hai chiều, nghĩa là nếu mỗi yếu tố a_2 in: 2 args. G_2 chỉ là ảnh hưởng của một yếu tố duy nhất a_1 in: 2 args. G_1, và do đó có phép tương ứng ngược lại

$$G_2 \ni a_2 \to G_1 \in a_1$$

thì gọi là có phép tương ứng 2 chiều

$G_1 \ni a_1 \leftrightarrow a_2 \in G_2$

thì ta gọi hai nhóm G_1 và G_2 là đẳng cấu.

Từ điều kiện bảo toàn phép nhân nhóm suy ra rằng ảnh hưởng của yếu tố đơn vị e_1 trong G_1 phải là yếu tố đơn vị e_2 trong G_2, ảnh hưởng của hai yếu tố nghịch đảo với nhau a_1 và a_2^{-1} của G_2.

Về phương diện cấu trúc đại số thì hai nhóm đẳng cấu có cấu trúc đại giống hệt nhau và có thể xem là cùng một nhóm, nghĩa là ta không phân biệt các nhóm đẳng cấp với nhau khi ta chỉ quan tâm đến cấu trúc đại số của chúng.