



Họ các điểm C_n , C_{nh} , C_{nv} , C_i

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Trong họ này có 15 nhóm điểm tinh thể học sau đây,

1) Nhóm C_1 chỉ gồm có một yếu tố đơn vị E . Không có yếu tố đối xứng nào, Phần tử hoặc ô cơ sở của tinh thể là bất đối xứng.

2) Nhóm C_i là nhóm giao hoán gồm hai yếu tố: đơn vị E và phép nghịch đảo i . Chỉ có một yếu tố đối xứng là tâm nghịch đảo i .

3) Nhóm $C_{1h} = C_{1v}$ là nhóm giao hoán gồm hai yếu tố: đơn vị E và phép phản xạ gương σ . Chỉ có một yếu tố đối xứng là mặt phẳng gương σ . Vì không có trục quay nên ta không phân biệt được mặt phẳng gương là thẳng đứng hay nằm ngang.

4) Nhóm C_2 là nhóm giao hoán gồm hai yếu tố: đơn vị E và phép quay C_2 góc π quanh một trục nào đó, $C_2^{-1} = C_2$, $C_2^2 = E$. Có một yếu tố đối xứng là trục quay C_2 .

5) Nhóm C_{2h} gồm hai yếu tố E , C_2 của nhóm quay C_2 , phép phản xạ gương σ_h qua một mặt phẳng gương trục giao với trục quay và các tổ hợp của chúng. Tổ hợp của phép quay C_2 quanh trục Oz .

$$C_2 : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad (16)$$

với phép phản xạ gương σ_h qua mặt phẳng gương xOy

$$\sigma_h : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad (17)$$

chính là phép nghịch đảo i

$$i : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z), \quad (18)$$

không phụ thuộc vào thứ tự của chúng,

Họ các điểm Cn, Cnh, Cnv, Ci

$$\sigma_h C_2 = C_2 \sigma_h = i. \quad (19)$$

Vậy nhóm C_{2h} là nhóm giao hoán gồm bốn yếu tố E, C_2, σ_h, i với bảng nhân nhóm sau đây

Bảng nhân nhóm C_{2h}

	E	C_2	σ_h	i
E	E	C_2	σ_h	i
C_2	C_2	E	i	σ_h
σ_h	σ_h	i	E	C_2
i	i	σ_h	C_2	E

Các yếu tố đối xứng của nhóm C_{2h} là: trục quay C_2 , mặt phẳng gương σ_h và tâm nghịch đảo i là giao điểm của chúng. Nhóm C_2 là nhóm con của nhóm C_{2h} .

6) Nhóm C_{2v} gồm các yếu tố E, C_2 của nhóm quay C_2 , phép phản xạ gương σ_v qua một mặt phẳng gương chứa trục quay cũng ký hiệu là σ_v và các tổ hợp của chúng. Ký hiệu mặt phẳng gương chứa trục quay và trục giao với mặt phẳng σ_v và σ'_v . Nếu trục quay là Oz

$$C_2 : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z).$$

mặt phẳng gương σ_v là mặt phẳng xOz

$$\sigma_v : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z). \quad (20)$$

Thì mặt phẳng gương σ'_v là mặt phẳng yOz

$$\sigma'_v : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z). \quad (20)$$

Dễ thử lại rằng

$$C_2 \sigma_v = \sigma_v C_2 = \sigma'_v, \quad (21a)$$

Họ các điểm C_n, C_{nh}, C_{nv}, C_i

$$C_2 \sigma'_v = \sigma'_v C_2 = \sigma_v \quad (21b)$$

$$\sigma_v \sigma'_v = \sigma'_v \sigma_v = C_2. \quad (21c)$$

Vậy nhóm C_{2v} là nhóm giao hoán gồm bốn yếu tố E, C_2, σ_v và σ'_v với bảng nhân nhóm sau đây

Bảng nhân nhóm C_{2v}

	E	C_2	σ_v	σ'_v
E	E	C_2	σ_v	σ'_v
C_2	C_2	E	σ'_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ'_v	E	C_2
σ'_v	σ'_v	σ_v	C_2	E

Có ba yếu tố đối xứng: trục quay C_2 và hai mặt phẳng gương chứa trục quay σ_v, σ'_v trục giao với nhau. Nhóm C_2 là nhóm con của nhóm C_{2v} .

7) Nhóm giao hoán C_3 là nhóm vòng sinh ra bởi phép quay C_3 một góc $\frac{2\pi}{3}$ quanh một trục nào đó. Yếu tố C_3^2 là phép quay góc $\frac{4\pi}{3}$ quanh trục này, nó trùng với phép quay C_3^{-1} góc $-\frac{2\pi}{3}$ quanh trục đã cho. Ta có

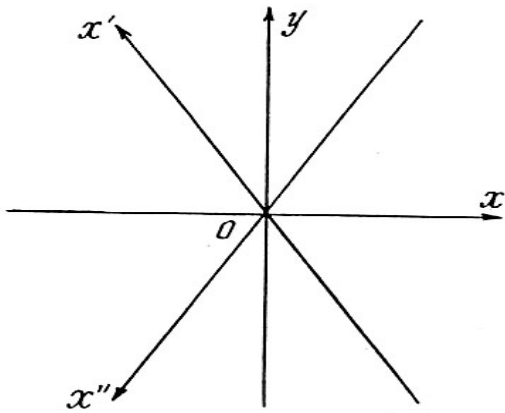
$$C_3^2 = C_3^{-1}, C_3^3 = E$$

Chỉ có một yếu tố đối xứng là trục quay C_3 .

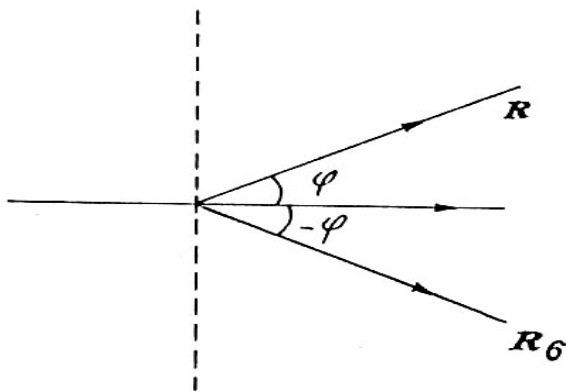
8) Nhóm C_{3h} là nhóm giao hoán gồm ba yếu tố $E, C_3, C_3^2 = C_3^{-1}$ của nhóm con C_3 , phép phản xạ gương σ_h qua một mặt phẳng gương trục giao với trục quay và các tổ hợp của chúng. Có hai yếu tố đối xứng là trục quay C_3 và mặt phẳng gương σ_h trục giao với nhau.

9) Nhóm C_{3v} gồm ba yếu tố E, C_3, C_3^{-1} của nhóm con C_3 và ba phép phản xạ gương $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$ qua ba mặt phẳng gương chứa trục quay cũng ký hiệu là $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$, mặt phẳng σ'_v

thu được từ mặt phẳng σ_v sau khi thực hiện phép quay $C_3^2 = C_3^{-1}$, tức là thu được từ mặt phẳng σ'_v sau khi thực hiện phép quay C_3 . Chú ý rằng vì các phép quay của mặt phẳng $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$ thì phải có nốt hai mặt phẳng kia. Các yếu tố đối xứng là: trục quay C_3 và ba mặt phẳng gương chứa trục quay $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$ chuyển chỗ cho nhau trong các phép quay của nhóm con C_3 . Chọn trục quay C_3 làm trục Oz và mặt phẳng gương σ_v làm mặt phẳng tọa độ xOz . Trên hình 3.3 ta vẽ ba giao tuyến Ox, Ox', Ox'' của mặt phẳng tọa độ xOy với ba mặt phẳng gương $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$. Các trục Ox' và Ox'' tạo với trục Ox các góc bằng $\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{4\pi}{3}$. Xét một điểm trên mặt phẳng xOy mà bán kính vectơ R của nó tạo với trục Ox một góc φ (giá trị đại số tính theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ). Trong phép phản xạ gương qua mặt σ_v bán kính vectơ R chuyển thành bán kính vectơ R_0 tạo với trục Ox góc $-\varphi$ (xem hình 3.4)



Hình 3.3



Hình 3.4

Ta viết

$$\sigma_v : \varphi \rightarrow -\varphi \quad (22a)$$

Họ các điểm Cn, Cnh, Cnv, Ci

Xét phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ'_v . Bán kính vector R tạo với trục Ox' góc $\varphi - \frac{2\pi}{3}$. Trong phép phản xạ gương σ'_v nó chuyển thành bán kính vector $R_{\sigma'}$ tạo với trục Ox' góc $(-\varphi - \frac{2\pi}{3})$ (xem hình 3.5). Do đó ta có

$$\sigma'_v : \varphi - \frac{2\pi}{3} \rightarrow -(\varphi - \frac{2\pi}{3}) = -\varphi + \frac{2\pi}{3}$$

nghĩa là

$$\sigma'_v : \varphi \rightarrow -\varphi + \frac{4\pi}{3} \sim -(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \quad (22b)$$

Chú ý rằng ta có thể thêm vào góc φ hoặc bớt đi từ góc này một đại lượng là bội số của 2π , do đó $-\varphi + \frac{4\pi}{3}$ và $-\varphi - \frac{2\pi}{3}$ là cùng một góc. Với phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ''_v (xem hình 3.6) ta có kết quả sau đây: Bán kính vector R tạo với trục Ox'' góc $\varphi - \frac{4\pi}{3}$ tức là $\varphi + \frac{2\pi}{3}$. Phép phản xạ gương σ''_v chuyển nó thành bán kính vector $R_{\sigma''}$ tạo với góc Ox'' góc $-(\varphi + \frac{2\pi}{3})$. Ta có

$$\sigma''_v : \varphi + \frac{2\pi}{3} \rightarrow -(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = -\varphi - \frac{2\pi}{3}$$

nghĩa là

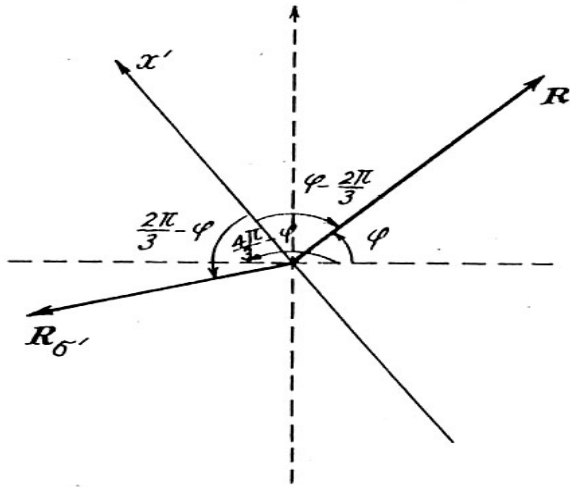
$$\sigma''_v : \varphi \rightarrow -(\varphi + \frac{4\pi}{3}) \sim \varphi + \frac{2\pi}{3} \quad (22c)$$

Còn trong các phép quay C_3 và $C_3^2 = C_3^{-1}$ góc φ thay đổi như sau

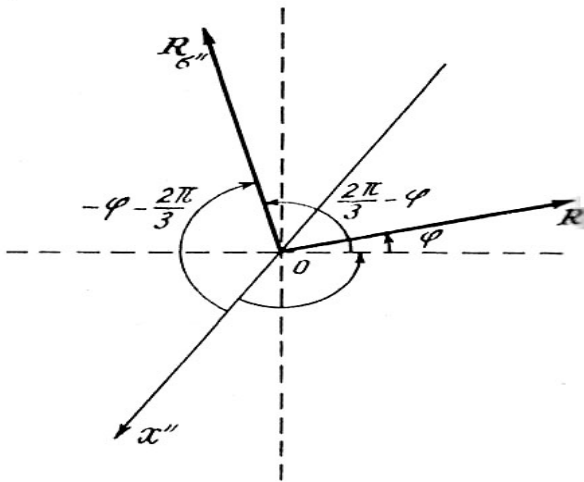
$$C_3 : \varphi \rightarrow \varphi + \frac{2\pi}{3}, \quad (23a)$$

$$C_3^2 = C_3^{-1} : \varphi \rightarrow \varphi + \frac{4\pi}{3} \sim \varphi - \frac{2\pi}{3} \quad (23b)$$

Họ các điểm C_n, C_{nh}, C_{nv}, C_i



Hình 3.5



Hình 3.6

Chú ý rằng các phép phản xạ gương và phép quay C_3 có tính chất

$$\sigma_v^2 = \sigma_v'^2 = \sigma_v''^2 = C_3^3 = E$$

Dùng tính chất này và các công thức (22a), (22b), (22c), (23a), (23b), ta suy ra các hệ thức sau đây:

$$\sigma_v' = C_3^{-1} \sigma_v = \sigma_v C_3, \quad (24a)$$

$$\sigma_v'' = C_3 \sigma_v = \sigma_v C_3^{-1}. \quad (24b)$$

Do đó ta có ngay

Họ các điểm C_n, C_{nh}, C_{nv}, C_i

$$C_3 \sigma'_v = \sigma'_v C_3^{-1} = \sigma_v, \quad (24c)$$

$$C_3^{-1} \sigma''_v = \sigma''_v C_3 = \sigma_v, \quad (24d)$$

Từ các hệ thức này ta lại thu được các hệ thức mới

$$\sigma_v \sigma'_v = \sigma'_v \sigma''_v = \sigma''_v \sigma_v = C_3, \quad (24g)$$

$$\sigma'_v \sigma_v = \sigma_v \sigma''_v = \sigma''_v \sigma'_v = C_3^{-1} \quad (24h)$$

Vậy với nhóm C_{3v} ta có bảng nhân nhóm sau đây

Bảng nhân nhóm C_{3v}

	E	C_3	C_3^{-1}	σ_v	σ'_v	σ''_v
E	E	C_3	C_3^{-1}	σ_v	σ'_v	σ''_v
C_3	C_2	C_3^{-1}	E	σ''_v	σ_v	σ'_v
C_3^{-1}	C_3^{-1}	E	C_3	σ'_v	σ''_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ'_v	σ''_v	E	C_3	C_3^{-1}
σ'_v	σ'_v	σ''_v	σ_v	C_3^{-1}	E	C_3
σ''_v	σ''_v	σ_v	σ'_v	C_3	C_3^{-1}	E

Cuối cùng ta xét từng yếu tố và xác định lớp các yếu tố liên hợp với yếu tố đã cho. Ta nhắc lại rằng nếu a là một yếu tố nào đó của một nhóm G thì tất cả các yếu tố gag^{-1} với mọi yếu tố g của G tạo thành lớp các yếu tố liên hợp với yếu tố a . Nếu a là yếu tố đơn vị E thì tất cả các yếu tố gag^{-1} đều trùng với E . Vậy chính yếu tố đơn vị E là một lớp. Ta hãy lấy a là C_3 . Các yếu tố liên hợp với nó là

$$C_3 C_3 C_3^{-1} = C_3, C_3^{-1} C_3 (C_3^{-1})^{-1} C_3,$$

$$\sigma_v C_3 \sigma_v = \sigma'_v \sigma_v = C_3^{-1},$$

$$\sigma'_v C_3 \sigma'_v = \sigma''_v \sigma'_v = C_3^{-1},$$

Họ các điểm C_n, C_{nh}, C_{nv}, C_i

$$\sigma_v'' C_3 \sigma_v'' = \sigma_v \sigma_v'' = C_3^{-1}$$

Vậy hai yếu tố C_3 và C_3^{-1} tạo thành một lớp yếu tố liên hợp. Còn nếu ta lấy a là σ_v , thì các yếu tố liên hợp với nó là

$$C_3 \sigma_v C_3^{-1} = \sigma_v'' C_3^{-1} = \sigma_v'$$

$$C_3^{-1} \sigma_v (C_3^{-1})^{-1} = \sigma_v' C_3 = \sigma_v''$$

$$\sigma_v \sigma_v \sigma_v = \sigma_v,$$

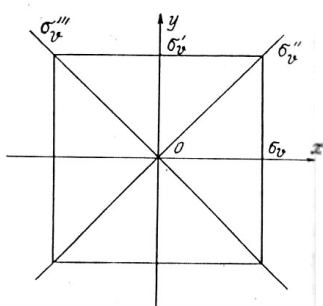
$$\sigma_v' \sigma_v \sigma_v' = C_3^{-1} \sigma_v' = \sigma_v''$$

$$\sigma_v'' \sigma_v \sigma_v'' C_3 \sigma_v'' = \sigma_v'$$

Vậy ba phép phản xạ gương $\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''$ tạo thành một lớp các yếu tố liên hợp. Tóm lại, nhóm C_{3v} chia thành ba lớp các yếu tố liên hợp sau đây

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{C_3, C_3^{-1}\}, C_3 = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}.$$

10) Nhóm giao hoán C_4 là nhóm vòng sinh bởi phép quay C_4 một góc bằng $\frac{\pi}{2}$ quanh một trục nào đó. Nhóm này gồm bốn yếu tố khác nhau là $C_4, C_4^2 = C_2, C_4^3 = C_4^{-1}$ và $C_4^4 = E$. Chỉ có một yếu tố đối xứng là trục quay C_4 .



Hình 3.7

11) Nhóm C_{4h} là nhóm giao hoán gồm bốn yếu tố E, C_4, C_2, C_4^{-1} của nhóm con C_4 , phép phản xạ gương σ_h qua một mặt phẳng gương trục giao với trục quay cũng gọi là mặt phẳng gương σ_h và các tổ hợp của chúng. Trong các tổ hợp này có tích $\sigma_h C_2 = C_2 \sigma_h$. Theo công thức (19) đó là phép nghịch đảo i đối với giao điểm của trục quay C_4 và mặt phẳng gương σ_h . Vậy ngoài trục quay C_4 và mặt phẳng gương σ_h là hai yếu tố đối xứng cho từ trước lại còn có một yếu tố đối xứng thứ ba là tâm nghịch đảo i .

12) Nhóm C_{4v} gồm các yếu tố E, C_4, C_2, C_4^{-1} của nhóm con C_4 và các phép phản xạ gương $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma_v'', \sigma_v'''$ qua bốn mặt phẳng phản xạ gương chứa trục quay cũng ký hiệu là $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma_v'', \sigma_v'''$ trong đó σ'_v trục giao với σ_v và thu được từ σ_v sau khi thực hiện phép quay C_4, σ_v'' và σ_v''' là hai mặt phẳng phân giác của hai góc vuông giữa các mặt phẳng σ_v và σ'_v . Nhóm C_{4v} là một nhóm các phép đối xứng của một hình trụ thẳng đứng đáy vuông. Trên hình 3.7 ta vẽ mặt đáy của hình trụ đó và các giao tuyến của các mặt phẳng gương $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma_v'', \sigma_v'''$ với mặt phẳng đáy. Ta chọn trục Oz trùng với trục quay C_4 , mặt phẳng tọa độ xOy là mặt phẳng đáy của hình trụ, chọn σ_v đi qua trục Ox và σ'_v đi qua trục Oy . Với những lý luận giống như khi nghiên cứu về nhóm C_{3v} ta có thể thiết lập được bảng nhân nhóm sau đây.

Bảng nhân nhóm C_{4v}

	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_v	σ'_v	σ_v''	σ_v'''
E	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_v	σ'_v	σ_v''	σ_v'''
C_4	C_4	C_2	C_4^{-1}	E	σ_v''	σ_v''	σ_v	σ'_v
C_2	C_2	C_4^{-1}	E	C_4	σ'_v	σ_v	σ_v''	σ_v'''
C_4^{-1}	C_4^{-1}	E	C_4	C_2	σ_v''	σ_v''	σ'_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ_v''	σ'_v	σ_v''	E	C_2	C_4	C_4^{-1}
σ'_v	σ'_v	σ_v''	σ_v	σ_v''	C_2	E	C_4^{-1}	C_4
σ_v''	σ_v''	σ'_v	σ_v''	σ_v	C_4^{-1}	C_4	E	C_2
σ_v'''	σ_v'''	σ_v	σ_v''	σ'_v	C_4	C_4^{-1}	C_2	E

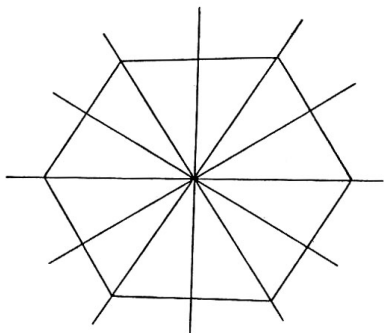
Các yếu tố đối xứng là: trục quay C_4 và bốn mặt phẳng gương chứa trục quay $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma_v'', \sigma_v'''$ nói ở trên. Sử dụng các quy tắc nhân nhóm trình bày trong bảng nhân nhóm ở trên ta có thể nghiệm lại rằng nhóm C_{4v} chia thành năm lớp các yếu tố liên hợp

$$C_1 = \{E\}, C_2 = \{C_4, C_4^{-1}\}, C_3 = \{C_2\},$$

$$C_4 = \{\sigma_v, \sigma'_v\}, C_5 = \{\sigma_v'', \sigma_v'''\}.$$

13) Nhóm giao hoán C_6 là nhóm vòng sinh bởi phép quay C_6 một góc bằng $\frac{\pi}{3}$ quanh một trục nào đó và gồm sáu yếu tố sau đây: $E, C_6, C_6^2 = C_3, C_6^3 = C_2, C_6^4 = C_3^{-1}, C_6^5 = C_6^{-1}$. Chỉ có một yếu tố đối xứng là trục quay C_6 .

14) Nhóm C_{6h} là nhóm giao hoán gồm sáu yếu tố $E, C_6, C_3, C_2, C_3^{-1}, C_6^{-1}$ của nhóm con C_6 , phép phản xạ gương σ_h qua một mặt phẳng gương trục giao với trục quay cũng gọi là mặt phẳng gương σ_h , và các tổ hợp của chúng. Vì trong số các yếu tố C_{6h} có cả phép quay C_2 lẫn phép phản xạ gương σ_h qua một mặt phẳng trục giao với trục quay C_2 , cho nên theo công thức (19) nhóm C_{6h} còn chứa phép nghịch đảo i đối với tâm nghịch đảo là giao điểm của trục C_6 và mặt phẳng gương σ_h . Vậy ngoài hai yếu tố đối xứng đã cho từ trước là trục quay C_6 và mặt phẳng gương σ_h trục giao với nhau còn có một yếu tố đối xứng thứ ba là tâm nghịch đảo i trùng với giao điểm của chúng.



Hình 3.8

15) Nhóm C_{6v} là một nhóm đối xứng của hình trụ thẳng đứng mà đáy là hình lục giác đều, gồm sáu yếu tố của nhóm con C_6 và sáu phép phản xạ gương qua sáu mặt phẳng gương chứa trục quay. Trên hình 3.8 ta vẽ hình lục giác đều là đáy của hình trụ và các giao tuyến của các mặt phẳng gương nói trên với mặt phẳng đáy.