



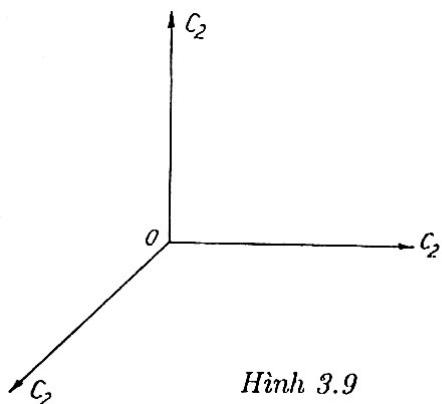
Họ các nhóm điểm D_n , D_{nh} , D_{nd}

Bởi:

Nguyễn Văn Hiệu

Mỗi nhóm điểm D_n gồm các phép quay của nhóm con C_n , n phép quay góc $\frac{2\pi}{n}$ quanh trục C_2 trục giao với trục quay C_n và các tổ hợp của chúng. Số nguyên n có thể có cả bốn giá trị 2, 3, 4, 6. Mỗi nhóm điểm D_{nh} gồm các phép quay của nhóm con D_n , phép phản xạ gương qua một mặt phẳng gương chứa các trục quay C_2 của nhóm con này và các tổ hợp của chúng. Số nguyên n cũng có thể có cả bốn giá trị 2, 3, 4, 6. Mỗi nhóm điểm D_{nd} gồm các phép quay của nhóm điểm D_n , các phép phản xạ gương qua n mặt phẳng gương (chứa trục quay C_n) là các mặt phẳng phân giác của các góc giữa hai trục quay C_2 , và các tổ hợp của chúng. Chúng ta sẽ chứng minh rằng nhóm điểm D_{nd} chỉ có thể là một nhóm điểm tinh thể học nếu n có hai giá trị 2 và 3. Như vậy trong họ đang xét ta có 10 nhóm điểm tinh thể học sau đây.

1) Nhóm D_2 có ba yếu tố đối xứng là các trục quay C_2 vuông góc với nhau từng đôi một (xem hình 3.9). Trong một phép quay C_2 quanh một trục nào đó mỗi trục khác chuyển thành chính nó nhưng đổi chiều ngược lại.

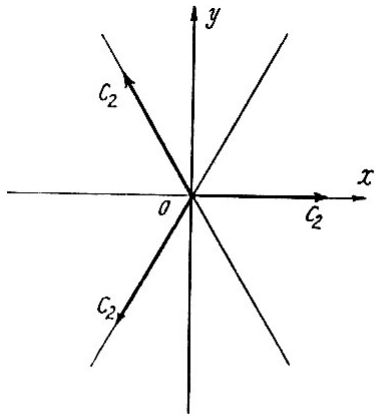


Hình 3.9

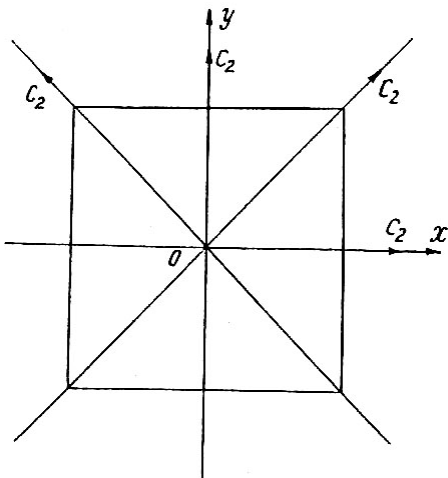
2) Nhóm D_3 có bốn yếu tố đối xứng là một trục quay C_3 và nằm trong cùng một mặt phẳng. Trên hình 3.10 ta kẻ cả ba trục quay C_2 đó, chọn một trục quay trùng bởi trục tọa

Họ các nhóm điểm D_n , D_{nh} , D_{nd}

độ Ox . Trục quay C_3 trục giao với mặt phẳng hình vẽ đi qua giao điểm O của ba trục quay C_2 .

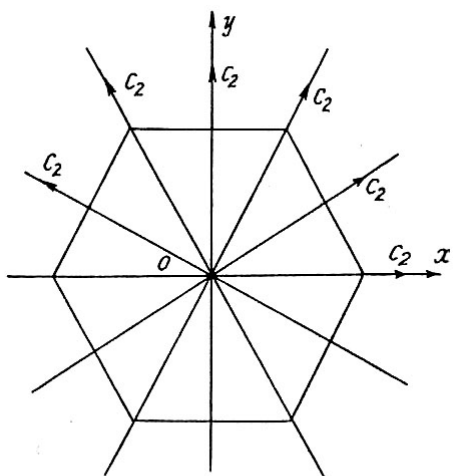


Hình 3.10



Hình 3.11

3) Nhóm D_4 có 5 yếu tố đối xứng là một trục quay C_4 và bốn trục quay C_2 trục giao với trục quay C_4 và nằm trong cùng một mặt phẳng. Trên hình 3.11 ta kẻ cả bốn trục quay C_2 đó, chọn hai trục quay trùng với hai trục tọa độ Ox và Oy . Khi đó hai trục quay C_2 khác là các đường phân giác của hai góc vuông tạo bởi các trục Ox và Oy . Trục quay C_4 trục giao với mặt phẳng hình vẽ và đi qua giao điểm O của các trục quay C_2 .



Hình 3.12

4) Nhóm D_6 có bảy yếu tố đối xứng là một trục quay C_6 và nằm trong cùng một mặt phẳng. Trên hình 3.12 ta kẻ sáu trục quay C_2 đó, chọn hai trục trùng với các trục tọa độ Ox và Oy . Góc giữa hai trục quay C_2 là một bội số của $\frac{\pi}{6}$. Trục quay C_6 trục giao với mặt phẳng hình vẽ và đi qua giao điểm O của các trục quay C_2 .

5) Nhóm D_{2h} gồm các yếu tố của nhóm con D_2 , phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ_h chứa hai trục quay C_2 và các tổ hợp của chúng. Ngoài các yếu tố đối xứng của nhóm D_2 là ba trục quay C còn có thêm hai yếu tố đối xứng là mặt phẳng gương σ_h và tâm nghịch đảo i trùng với giao điểm của ba trục quay.

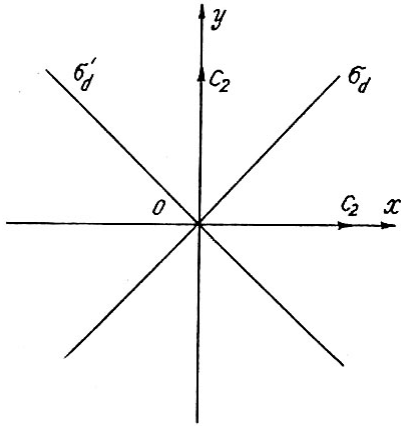
6) Nhóm D_{3h} gồm các yếu tố của nhóm con D_3 , phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ_h chứa ba trục quay C_2 và các tổ hợp của chúng. Các yếu tố đối xứng là: trục quay C_3 , ba trục quay C_2 trục giao với trục quay C_3 và nằm trong cùng một mặt phẳng, mặt phẳng gương σ_h chứa ba trục quay C_2 .

7) Nhóm D_{4h} gồm các yếu tố của nhóm con D_4 , phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ_h chứa bốn trục quay C_2 và các tổ hợp của chúng. Các yếu tố đối xứng là: trục quay C_4 , bốn trục quay C_2 trục giao với trục quay C_4 và nằm trong cùng một mặt phẳng, mặt phẳng gương σ_h chứa bốn trục quay C_2 và tâm nghịch đảo i trùng với giao điểm của các trục quay.

8) Nhóm D_{6h} gồm các yếu tố con của nhóm D_6 , phép phản xạ gương qua mặt phẳng gương σ_h chứa sáu trục quay C_2 và các tổ hợp của chúng. Ngoài các yếu tố đối xứng đã biết của nhóm D_6 còn có hai yếu tố đối xứng nữa là mặt phẳng gương σ_h và tâm nghịch đảo i trùng với giao điểm của các trục quay.

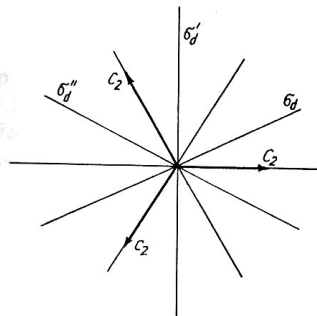
Họ các nhóm điểm D_n, D_{nh}, D_{nd}

9) Nhóm D_{2d} gồm các yếu tố của nhóm con D_2 , hai phép phản xạ gương σ_d, σ'_d qua hai mặt phẳng gương chứa một trục quay C_2 và là hai mặt phẳng phân giác của hai góc vuông tạo bởi hai trục quay C_2 kia, và các tổ hợp của chúng. Ta cũng gọi hai mặt phẳng gương là σ_d và σ'_d . Ta chọn giao tuyến của hai mặt phẳng gương này (một trục quay C_2) làm trục Oz , chọn hai trục quay C_2 trục giao với Oz làm hai trục Ox và Oy . Trên hình 3.13 ta vẽ hai giao tuyến của hai mặt phẳng gương σ_v, σ'_v với mặt phẳng tọa độ xOy . Ba trục quay C_2 và hai mặt phẳng gương σ_v, σ'_v là các yếu tố đối xứng.



Hình 3.13

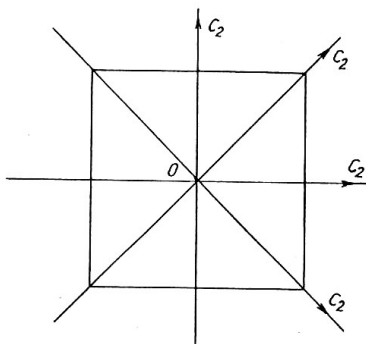
10) Nhóm D_{3d} gồm các yếu tố của nhóm con D_3 , ba phép phản xạ gương qua ba mặt phẳng gương $\sigma_d, \sigma'_d, \sigma''_d$ chứa trục quay C_3 . Trên hình 3.14 ta vẽ ba giao tuyến của ba mặt phẳng gương $\sigma_d, \sigma'_d, \sigma''_d$ với mặt phẳng tọa độ xOy chứa ba trục quay C_2 . Trục quay C_2 và ba mặt phẳng gương $\sigma_d, \sigma'_d, \sigma''_d$ là các yếu tố đối xứng.



Hình 3.14

Cuối cùng ta hãy thử lại rằng không thể có nhóm điểm tinh thể học loại D_{nd} với n là một trong hai số nguyên 4 hoặc 6. Ta hãy xét kỹ nhóm D_{4d} . Với nhóm D_{6d} có thể lặp lại các lập luận tương tự.

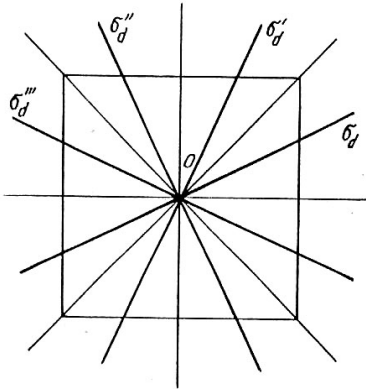
Nhóm D_{4d} chứa các yếu tố của nhóm con D_4 đã biết ở trên. Ta chọn trục quay C_4 làm trục tọa độ Oz , chọn mặt phẳng chứa các trục quay C_2 làm mặt phẳng tọa độ xOy , chọn hai trục quay C_2 trục giao với nhau làm hai trục tọa độ Ox và Oy . Hai trục quay C_2 kia hướng theo hai đường phân giác của hai góc vuông tạo bởi hai trục Ox và Oy . Hình vuông tâm O trên mặt phẳng xOy với hai cạnh song song với hai trục tọa độ (hình 3.15) có tính chất đối xứng (bất biến) đối với tất cả các phép biến đổi của nhóm con D_4 .



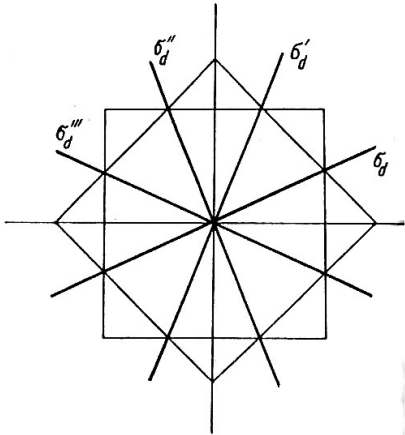
Hình 3.15

Ngoài các yếu tố đối xứng của nhóm D_4 là trục quay C_4 và bốn trục quay C_2 ta hãy thử đưa thêm các yếu tố đối xứng mới là bốn mặt phẳng phân giác của các góc $\frac{\pi}{4}$ tạo bởi các trục quay C_2 từng đôi một, và xét các phép phản xạ gương $\sigma_d, \sigma'_d, \sigma''_d, \sigma'''_d$ qua bốn mặt phẳng gương này (hình 3.16). Rõ ràng rằng hình vuông đối xứng (bất biến) đối với nhóm con D_4 không thể đối xứng (bất biến) đối với các phép phản xạ gương $\sigma_d, \sigma'_d, \sigma''_d, \sigma'''_d$. Trái lại, trong các phép phản xạ gương này hình vuông đã cho chuyển thành một hình vuông đồng tâm khác đã quay đi một góc $\frac{\pi}{8}$ so với hình vuông ban đầu (hình 3.17). Phối hợp cả hai hình vuông ta được một hình sao tám cạnh đối xứng với nhóm C_8 mà trục quay là trục Oz . Vậy nhóm D_{4d} phải chứa nhóm con C_8 . Nhưng ta lại biết rằng không có nhóm điểm tinh thể học nào chứa nhóm con C_8 . Vậy D_{4d} không thể là nhóm điểm tinh thể học. Nhóm D_{6d} cũng không thể là nhóm điểm tinh thể học.

Họ các nhóm điểm D_n , D_{nh} , D_{nd}



Hình 3.16



Hình 3.17

Tóm lại, trong các nhóm D_n , D_{nh} và D_{nd} có 10 nhóm điểm tinh thể học đã trình bày ở trên. Trong số các mặt phẳng tạo bởi các trục quay giao nhau là các yếu tố đối xứng của các nhóm điểm đang xét luôn luôn có các cặp mặt phẳng trục giao với nhau từng đôi một. Do đó các nhóm điểm này tạo thành một họ gọi là **họ nhị diện (dihedral)**.